math

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 182

Heft 1

Ausgegeben am 1. März 1940

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1940

Band 182. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Neumer, Walter, Die dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, welche keine Invariante erster Ordnung besitzen. II.	1
Braun, Hel, Geschlechter quadratischer Formen	32
Lorenzen, P., Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen	50
Rosenfeldt, Kurt, Über algebraische Flächen mit Büscheln elliptischer Kurven	51
Delvendahl, Otto, Die Singularitäten der Elementarkurven	54
Sprague, R., Über die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate	60

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Schriftleitung unter der Anschrift:
An die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Die dreigliedrigen Berührungstransformationsgruppen der Ebene, welche keine Invariante erster Ordnung besitzen. II.*)

Von *Walter Neumer* in Worms.

Zweiter Abschnitt.

Die verschiedenen Typen von dreigliedrigen, keine Funktion $I(x, y, y')$ invariant lassenden Untergruppen einer mit der projektiven G_8 der Ebene ähnlichen Berührungstransformationsgruppe und ihre Beziehungen zu anderen Untergruppen, dargestellt auf Grund der Definitionsgleichungen.

§ 8. Charakterisierung der verschiedenen Typen von Berührungstransformationsgruppen G_3^2 überhaupt.

Unser Ziel ist es nunmehr, die verschiedenen Typen von G_3^2 (85) einer $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ zu charakterisieren, indem wir die speziellen Relationen zwischen den Basisgrößen $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ angeben, welche für jeden Typus außer den allgemeinen Relationen des Theorems 1 noch bestehen müssen. Dieses Ziel werden wir schrittweise erreichen. Zunächst bemerken wir, daß eine vollständige Einteilung der Klasse von Gruppen G_3^2 in Typen von ähnlichen B.T.s-Gruppen überhaupt durch folgende beiden Kriterien bewirkt werden kann: *erstens* die Anzahl der wesentlichen Parameter der Derivierten (die gleich dem Rang der Determinante (40) oder (112) ist) und *zweitens* die Anzahl der invarianten inf. Trf.n der G_3^2. Untersuchung der speziellen G_3^2 (42, b, c, f, g) liefert folgende Tabelle (vgl. § 3):

(137)

	0	1	2
3	$\widetilde{\mathcal{G}}_3$		
2		$\widehat{\mathcal{G}}_3$	$\mathcal{G}_3^c$ $(c \neq \infty)$
1		$\mathcal{G}_3$	$\mathcal{G}_3^\infty$

in welcher die Ziffern der äußeren linken Spalte die Parameterzahl der Derivierten und die Ziffern der oberen Zeile die Anzahl der inv.n inf. Trf.n angeben. Daher braucht man (vgl. (112)) zu den Relationen des Theorems 1 nur die Ungleichung $\mathsf{AB} - \Gamma^2 \neq 0$ hinzuzufügen, wenn man will, daß (85) eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ definiere.

Wir versuchen nun, die inv.n inf. Trf.n direkt aus dem System (85) zu bestimmen. Die Rechnung führen wir zunächst für das System (55) durch. U sei die ch. Fu. einer der gesuchten inv.n inf. Trf.n. Dann ist zu verlangen, daß vermöge (55) $\{UM\} = \text{const.}\, U$

*) Teil I erschien in diesem Journal **181** (1939), S. 133—152. Abschnitte, Paragraphen, Sätze und Formeln sind durch beide Teile fortlaufend durchnummeriert.

oder, wegen (54b), wenn für den Augenblick $\log U = L$ gesetzt wird,

$$(138)\quad (L_2 + \varphi_2)\, M_1 - (L_1 + \varphi_1)\, M_2 + (\varphi_1 L_2 - \varphi_2 L_1)\, M = \text{const.}$$

wird. Nun folgt aus (55):

$$(139)\quad \begin{array}{l} \text{(a)}\ L_{11} = -L_1^2, \quad L_{22} = -L_2^2, \\ \text{(b)}\ L_{12} = -L_1 L_2 - \sigma_2 L_1 + \sigma_1 L_2 - \sigma_3, \quad L_{21} = -L_1 L_2 + \tau_2 L_1 - \tau_1 L_2 + \tau_3. \end{array}$$

Üben wir auf (138) die Op. ∂_1 aus, so kommt wegen (55), wenn wir die Koeffizienten von M_1, M_2, M gleich Null setzen:

$$(140)\quad \begin{array}{l} L_{21} + \varphi_{21} - \tau_2(L_1 + \varphi_1) + \varphi_1 L_2 - \varphi_2 L_1 = 0, \ -(L_{11} + \varphi_{11}) + \tau_1(L_1 + \varphi_1) = 0, \\ \qquad -\tau_3(L_1 + \varphi_1) + \varphi_1 L_{21} + \varphi_{11} L_2 - \varphi_{21} L_1 - \varphi_2 L_{11} = 0. \end{array}$$

Vermöge (139) liefern die Gleichungen ($140_{1,2}$)

$$(141)\quad \begin{array}{c} (L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1)\,(L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2) + \tfrac{1}{2}(\psi(L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1) - \chi(L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2)) - \Gamma(\tfrac{1}{4}) = 0, \\ (L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1)^2 = \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}). \end{array}$$

Nun hätten wir (138) auch der Op. ∂_2 unterwerfen können; folglich gelten auch die Relationen, welche aus (141) durch die Substitution (64) erhalten werden:

$$(141^*)\quad \begin{array}{c} (L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1)\,(L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2) - \tfrac{1}{2}(\psi(L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1) - \chi(L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2)) - \Gamma(\tfrac{1}{4}) = 0, \\ (L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2)^2 = \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}). \end{array}$$

Die Relationen (141_1), (141_1^*) zusammen genommen sind äquivalent mit

$$(142)\quad \psi(L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1) - \chi(L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2) = 0, \ (L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1)\,(L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2) = \Gamma(\tfrac{1}{4}).$$

Die Relationen (141_2), ($141^*{}_2$), (142_2) zeigen, daß $\mathsf{AB} - \Gamma^2 = 0$ sein muß, wenn es überhaupt inv.e inf. Trf.n geben soll. Wegen (70) gilt nämlich die Identität

$$(143)\qquad \mathsf{A}(a)\,\mathsf{B}(b) - \Gamma(a)\,\Gamma(b) \equiv \mathsf{AB} - \Gamma^2$$

für die Größen (87) sowohl wie (127). Damit ist wiederum bewiesen, daß die Bedingung $\mathsf{AB} - \Gamma^2 \neq 0$, zu den Relationen des Theorems 1 hinzugefügt, bewirkt, daß (85) eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ definiert. Schreiben wir (141_2^5), ($141^*{}_2$) so:

$$(144)\quad L_1 + \tfrac{1}{2}\tau_1 = \sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}, \ L_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})} \quad (\sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}\sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})} = \Gamma(\tfrac{1}{4})),$$

dann wird (142) eine Folge von (144). Denn wir haben die Identität

$$(145)\qquad \psi\sqrt{\mathsf{A}(a)} - \chi\sqrt{\mathsf{B}(a)} = 0 \quad (\sqrt{\mathsf{A}(a)}\sqrt{\mathsf{B}(a)} = \Gamma(a)).$$

Wenn nämlich $\sqrt{\mathsf{A}(a)} = \sqrt{\mathsf{B}(a)} = 0$, dann ist (145) sicher richtig. Ist aber z. B. $\mathsf{A}(a) \neq 0$, so folgt aus (145) durch Multiplikation mit $\sqrt{\mathsf{A}(a)}$: $\psi\mathsf{A}(a) - \chi\Gamma(a) = 0$, eine direkte Folge von (70). Ähnlich überzeugt man sich unschwer, daß die Relation (140_3) und somit auch diejenige, welche mittels der Substitution (64) aus ihr hervorgeht, auf Grund von (144) erfüllt ist (zur Bestätigung bediene man sich der Beziehungen

$$(\sqrt{\mathsf{A}(a)})_i = \tau_i\sqrt{\mathsf{A}(a)}, \quad (\sqrt{\mathsf{B}(a)})_i = \sigma_i\sqrt{\mathsf{B}(a)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

welche man aus (62), (69), (68) findet). Mithin ist (144) der Forderung (138) äquivalent.

Ferner zeigt eine leichte Rechnung, daß auch die Gleichungen (139) eine Folge von (144) sind. Da die Diffgl.n (139) die Int.Bed.n (4) für $f = L$ erfüllen, müssen diese auch von den Diffgl.n (144) befriedigt werden. Zu jeder der zwei in (144) möglichen Wurzelkombinationen werden also durch (144) ∞^1 Größen L + const., d. h. ∞^1 Größen const. U, mithin eine inv.e inf. B.T. bestimmt. Nur dann, wenn $\mathsf{A}(\frac{1}{4})$, $\mathsf{B}(\frac{1}{4})$ *beide* verschwinden, gibt es nur eine einzige inv.e inf. B.T.

Wegen der Trf.s-Formeln (88), (89) bzw. (135) gelten die soeben gefundenen Ergebnisse auch für die Größen (87) bzw. (127) bezüglich des Systems (85) bzw. (125). Daher können wir auf Grund der Tabelle (137) in Verbindung mit (112) die folgende vollständige Disjunktion vornehmen:

(146)

			$\mathsf{A}(\frac{1}{4}) = \mathsf{B}(\frac{1}{4}) = 0$	$\mathsf{A}(\frac{1}{4})$, $\mathsf{B}(\frac{1}{4})$ nicht beide $= 0$
$\mathsf{AB} - \Gamma^2 \neq 0$		$\widetilde{\mathcal{G}}_3$		
$\mathsf{AB} - \Gamma^2 = 0$	$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ nicht alle $= 0$		$\widehat{\mathcal{G}}_3$	$\mathcal{G}_3^c$ $(c \neq \infty)$
	$\mathsf{A} = \mathsf{B} = \Gamma = 0$		$\mathcal{G}_3$	$\mathcal{G}_3^x$

Der Inhalt dieser Tabelle lautet in Worten:

Theorem 2. *Damit durch ein System* (85) *bzw.* (125), *welches den Voraussetzungen des Theorems 1 bzw. des Satzes 5 genügt, eine* $\widetilde{\mathcal{G}}_3$; $\widehat{\mathcal{G}}_3$; $\mathcal{G}_3$; $\mathcal{G}_3^c(c \neq \infty)$; $\mathcal{G}_3^x$ *definiert werde, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen erfüllt sind, welche in derselben Zeile und Spalte der Tabelle* (146) *stehen wie die betreffende Gruppenbezeichnung. Dabei bedeuten* χ, ψ, A, B, Γ *die Größen* (87) *bzw.* (127).

Aus (144) erhalten wir mittels der Trf.s-Formeln (51), (26), (85′), (88) unter Berücksichtigung von (25a) und (29) die entsprechenden Beziehungen bezüglich der allgemeinen G_3^2 (85):

$$(147)\qquad \boxed{\begin{gathered}(\log U)_\alpha + \tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi) = \sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}, \quad (\log U)_\beta + \tfrac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi) = \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})} \\ (\sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}\sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})} = \Gamma(\tfrac{1}{4}))\,.\end{gathered}}$$

Der Grenzübergang $\beta = \beta_{0)} \to \infty$ reduziert das System (147) auf

$$(148)\qquad \begin{gathered}(\log U)_\alpha + \tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \alpha_2) = \sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}, \quad (\log U)_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})}, \\ (\sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}\sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})} = \Gamma(\tfrac{1}{4}))\,,\end{gathered}$$

unter $\chi, \ldots, \Gamma$ die Größen (127) verstanden.

§ 9. Die singulären invarianten Differentialgleichungen 2. O. einer G_3^2.

Von charakteristischer Bedeutung für die Art des Enthaltenseins einer G_3^2 in einer $\mathcal{G}_8$ sind diejenigen ihrer inv.n Diffgl.n 2. O., welchen eine auszeichnende gruppentheoretische Eigenschaft zukommt. Das trifft zunächst zu für die inv.n Diffgl.n 2. O., welche die kommutable inf. Trf. der betreffenden G_3^2 gestatten und welche wir *singulär* nennen wollen. Für eine proj.e G_3^2 (55) findet man durch Einsetzen der Größen (58) und (54a) in die Bedingung (34) zur Bestimmung der singulären Diffgl.n die quadratische Gleichung

$$(149)\qquad \mathsf{B}\varepsilon^2 - 2\Gamma\varepsilon + \mathsf{A} = 0.$$

Die Formel (58) und die Gleichung (149) unterwerfen wir der B.T. (14). Dabei benutzen wir die Beziehung

$$(150)\qquad \mathfrak{e} = -\frac{P_1 - P_2\varepsilon}{X_1 - X_2\varepsilon} = \frac{P_\beta}{X_\alpha}\frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon - \beta} \qquad (\alpha, \beta \text{ s. } (21)),$$

gemäß welcher die Überführung der Diffgl. $\mathfrak{y}'' + \mathfrak{e}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = 0$ in die Diffgl.

$$y'' + \varepsilon(x, y, y') = 0$$

mittels der B.T. (14) erfolgt. Mit Rücksicht auf (150) und (88) finden wir aus (58) und (149) die Relationen

$$(151)\qquad \boxed{\varepsilon = \frac{a\beta e^\tau + b\alpha e^\sigma}{ae^\tau + be^\sigma}}$$

$$(152)\qquad \boxed{\mathsf{B}(\varepsilon - \alpha)^2 - 2\Gamma(\varepsilon - \alpha)(\varepsilon - \beta) + \mathsf{A}(\varepsilon - \beta)^2 = 0}$$

für die inv.n Diffgl.n $y'' + \varepsilon = 0$ der G_3^2 (85) und die singulären unter ihnen. Der Parameter $a : b$ in (151) ist gleich dem Parameter a in (58).

Den Grenzübergang $\beta \to \infty$ vollziehen wir in (151), (152) auf dem Wege $\beta = \beta_{(0)} \to \infty$, wobei die Festsetzungen (126), (127′) zu beachten sind. Das Ergebnis lautet

$$\varepsilon = \alpha + ae^{\tau-\sigma}, \tag{153}$$

$$\mathsf{B}(\varepsilon - \alpha)^2 - 2\Gamma(\varepsilon - \alpha) + \mathsf{A} = 0; \tag{154}$$

Dabei ist $a : b$ wieder durch a ersetzt.

Die Gleichung (152) lehrt nach Theorem 2, daß die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ *zwei*, die $\mathcal{G}_3^c$ ($c \neq \infty$) und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ *eine* singuläre inv.e Diffgl. 2. O. besitzen, bei den $\mathcal{G}_3^\infty$ und $\overline{\mathcal{G}}_3$ jedoch *alle* inv.n Diffgl.n 2. O. singulär sind.

Soll z. B. $y'' + \alpha = 0$ bzw. $y'' + \beta = 0$ singulär sein, dann muß nach (152) $\mathsf{A} = 0$ bzw. $\mathsf{B} = 0$ werden. Das erkennt man auch direkt, *denn* $\mathsf{A} = 0$ *bzw.* $\mathsf{B} = 0$ *ist nichts anderes als die Invarianzbedingung der Diffgl.* $y'' + \alpha = 0$ *bzw.* $y'' + \beta = 0$ *gegenüber der kommutablen inf B.T.* e^{-v}.

§ 10. Der Begriff der Imprimitivitätszerlegung in bezug auf Berührungstransformationen.

Auf eine weitere Klasse von ausgezeichneten inv.n Diffgl.n 2. O. einer G_3^2 stößt man durch folgende Untersuchung. ∞^1 Gleichungen

$$I(x, y, y') = \text{const.} \tag{155}$$

bestimmen eine *Imprimitivitätszerlegung* (Impr.Z)[22]) des R_3 der Variablen x, y, y'; als eine Schar von ∞^1 Diffgl.n aufgefaßt definiert (155) ∞^1 Scharen von ∞^1 Element- M_1 der Ebene x, y. Die unendliche Gruppe der Inv.n $I(x, y, y')$ wird definiert durch (33) oder, anders geschrieben,

$$U_\varepsilon = vU, \tag{156}$$

wo ε, v gegeben sind durch

$$I_1 - \varepsilon I_2 = 0, \; I_3 + vI_2 = 0. \tag{157}$$

ε, v stehen in der Beziehung (35) oder

$$v_\varepsilon = -v^2 - \varepsilon_2 v - \varepsilon_3, \tag{158}$$

und umgekehrt ist (158) notwendig und hinreichend, damit die Diffgl.n (157) ein vollständiges System mit *einer* wesentlichen Lösung $I(x, y, y')$ bilden [23]). Daher bestimmt ein Größenpaar ε, v mit der Eigenschaft (158) immer eine Impr.Z., welche wir dementsprechend durch $\{\varepsilon, v\}$ bezeichnen.

Die Impr.Z. $\{\varepsilon, v\}$ faßt offenbar die ∞^2 Integralkurven $\mathfrak{C}_\varepsilon$ der Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ in ∞^1 Scharen (155) von je ∞^1 Kurven zusammen. Umgekehrt stellt jede Zusammenfassung von ∞^2 Kurven — welche ja als die Lösungen $\mathfrak{C}_\varepsilon$ einer Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ angesehen werden können — in ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven eine Impr.Z. $\{\varepsilon, v\}$ dar; denn die ∞^1 Scharen von ∞^1 Kurven können durch ∞^1 Diffgl.n (155) definiert werden.

Die Gleichung (156) ist äquivalent mit

$$U^{\varepsilon'} = v'U \qquad \left(\varepsilon\varepsilon' = 1, \; v' = -\frac{v}{\varepsilon}\right), \tag{159}$$

und (158) kann so geschrieben werden

$$v'^{\varepsilon'} = -v'^2 - \varepsilon_1' v' + \varepsilon_3' \tag{160}$$

(vgl. Satz 4, dessen Anwendung z. B. dadurch möglich gemacht wird, daß man die Gleichung (156) vermöge der B.T. (14) aus der Gleichung $\mathfrak{U}_\mathrm{I} = 0$ hervorgehen läßt).

---

[22]) Zu dieser ganzen Ziffer vgl. W. Neumer, Über gewisse Beziehungen, welche bei der allgemeinsten Diffgl. 3. O. stattfinden, die durch B.T. in $y''' = 0$ übergeführt werden kann, dieses Journal **178** (1937), S. 214—228, § 2, **1**.

[23]) A. a. O. [10]).

Die größte Gruppe, in welcher die Gruppe (156) oder (159), also auch die Impr.Z. $\{\varepsilon, v\}$ inv. ist, wird definiert durch jedes der beiden Gleichungspaare

(161) $U_{\varepsilon\varepsilon} + \varepsilon_2 U_\varepsilon + \varepsilon_3 U = 0, \quad U_{3\varepsilon} + v U_{2\varepsilon} - v_2 U_\varepsilon + v_\varepsilon U_2 - v_3 U = 0,$

(161′) $U^{\varepsilon'\varepsilon'} + \varepsilon_1' U^{\varepsilon'} - \varepsilon_3' U = 0, \quad -U_3^{\varepsilon'} + v' U_1^{\varepsilon'} - v_1' U^{\varepsilon'} + v'^{\varepsilon'} U_1 + v_3' U = 0.$

(161_1) oder $(161_1')$ definiert die unendliche Gruppe der Diffgl. $y'' + \varepsilon = 0$ oder $\varepsilon' y'' + 1 = 0$.

Wenn $\varepsilon = \infty$, also $\varepsilon' = 0$ wird, behält $v' = -v : \varepsilon$ immer noch einen endlichen Wert, und auch die Gleichungen (159), (160), (161′) behalten ihren Sinn; in diesem Falle wollen wir von der Impr.Z. $\{\infty, v'\}$ sprechen.

§ 11. Die invarianten Imprimitivitätszerlegungen der Gruppen G_3^2.

Wir suchen jetzt sämtliche Impr.Z.n $\{\varepsilon, v\}$, welche gegenüber einer bestimmten G_3^2 (85) inv. bleiben. ε muß natürlich eine der Größen (151) sein. Die Rechnung führen wir zuerst durch für das System (55), wo ε durch (58) gegeben ist. Wir haben dann zu verlangen, daß (161_2) aus (55) folge, was wegen (158) bedeutet, daß

$$\begin{gathered} -r_2 + \tau_2 v + (\varphi_{22} - \sigma_2\varphi_2)\varepsilon - \varphi_{12} + \tau_2\varphi_1 = 0, \\ (162)\quad \varepsilon r_2 - v^2 + ((\sigma_2 - \tau_2)\varepsilon - \tau_1)\, v + (\sigma_3 - \tau_3 - \varphi_{21} + \sigma_1\varphi_2)\varepsilon + \varphi_{11} - \tau_1\varphi_1 = 0, \\ -r_3 + \tau_3 v + (\varphi_{23} - \sigma_3\varphi_2)\varepsilon - \varphi_{13} + \tau_3\varphi_1 = 0. \end{gathered}$$

Elimination von r_2 aus $(162_{1,2})$ liefert für v eine quadratische Gleichung mit der Lösung

(163) $\qquad v = \tfrac{1}{2}(\sigma_2\varepsilon - \tau_1) + \mathsf{N}, \quad \mathsf{N} = \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})\varepsilon^2 - 2\Gamma(\tfrac{1}{4})\varepsilon + \mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}.$

Auf Grund von (76) findet man

(164) $\qquad \mathsf{N}_i = \tau_i \mathsf{N} \qquad (i = 1, 2, 3),$

womit man mühelos bestätigt, daß $(162_{1,3})$ durch den Ausdruck (163) für v befriedigt werden.

Die Formel (163) unterwerfen wir der B.T. (14) und schreiben sie zu dem Zweck in der Form

(165) $\qquad \mathfrak{u} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{e} - \mathfrak{t}_I) + \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} = \sqrt{\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4})\mathfrak{e}^2 - 2\mathfrak{C}(\tfrac{1}{4})\mathfrak{e} + \mathfrak{A}(\tfrac{1}{4})},$

welche dem System (81) entspricht. Die Impr.Z. $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{u}\}$ wird durch die B.T. (14) in die Impr.Z. $\{\varepsilon, v\}$ verwandelt, wobei $\mathfrak{e}$ durch (150) und $\mathfrak{u}$ durch

(166) $$\mathfrak{u} = \frac{1}{X_\varepsilon}\left(v + \frac{\Delta_\varepsilon}{\Delta}\right)$$

gegeben ist. Die Formel (166) ergibt sich am einfachsten, wenn man die Defgl.

$$\mathfrak{U}_\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{U}_I - \mathfrak{e}\mathfrak{U}_{II} = \mathfrak{n}\mathfrak{U}$$

durch die B. T. (14) in (156) überführt und dabei die Identität

(167) $$f_\varepsilon = \bar{\omega}((\varepsilon - \alpha)f_\beta - (\varepsilon - \beta)f_\alpha)$$

benützt. Darauf findet man aus (165) vermöge (166), (150), (85′), (88), (26), (29) die allgemeine Beziehung

(168) $$\boxed{\begin{aligned} v(\varepsilon) &= \tfrac{1}{2}\,\bar{\omega}(\tau_\alpha(\varepsilon - \beta) - \sigma_\beta(\varepsilon - \alpha) - \pi - 2\mathsf{N}(\varepsilon)), \\ \mathsf{N}(\varepsilon) &= \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})(\varepsilon - \alpha)^2 - 2\Gamma(\tfrac{1}{4})(\varepsilon - \alpha)(\varepsilon - \beta) + \mathsf{A}(\tfrac{1}{4})(\varepsilon - \beta)^2}. \end{aligned}}$$

Zu jeder inv.n Diffgl. 2. O. $y'' + \varepsilon = 0$ einer Gruppe (85) ist daher ein *Paar* von inv.n Impr.Z.n vorhanden, ausgenommen diejenigen, für welche $\mathsf{N}(\varepsilon) = 0$; denn dann fallen die beiden Impr.Z.n zusammen. Die durch die quadratische Gleichung $\mathsf{N}(\varepsilon) = 0$ bestimmten inv.n Diffgl.n 2. O. der G_3^2 (85) wollen wir als *einzählig* bezeichnen. Die Einzähligkeit ist demnach eine Eigenschaft, welche durch B.T.n nicht zerstört wird.

Theorem 2 zeigt wegen (143), daß jede $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ genau *zwei*, jede $\mathcal{G}_3^c$ genau *eine*, jede $\widehat{\mathcal{G}}_3$ und $\bar{\mathcal{G}}_3$ lauter einzählige inv.e Diffgl.n 2. O. besitzen.

Der Grenzübergang $\beta = \beta_0) \to \infty$ reduziert (168) auf

$$\begin{aligned} v(\varepsilon) &= \tfrac{1}{2}\,(\sigma_2(\varepsilon - \alpha) - \tau_\alpha - \alpha_2 + 2\mathsf{N}(\varepsilon)), \\ \mathsf{N}(\varepsilon) &= \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})(\varepsilon-\alpha)^2 - 2\,\Gamma(\tfrac{1}{4})(\varepsilon-\alpha) + \mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}. \end{aligned} \tag{169}$$

Kommt $y'' = \infty$ unter den inv.n Diffgl.n 2. O. einer Gruppe G_3^2 vor — was bezüglich der Gruppen (125) immer der Fall ist —, dann dividiere man (168) bzw. (169) durch ε und setze nach (159) $v = -\varepsilon v'$; der Grenzübergang $\varepsilon \to \infty$ liefert für $v'(\infty)$ ein Ergebnis, welches sich sofort hinschreiben läßt (die Anwendung des Satzes 4 unter Berücksichtigung von (123_{2-6}) mit nachfolgendem Grenzübergang $\varepsilon' \to 0$ wäre hier umständlicher).

§ 12. Die fixen invarianten Differentialgleichungen 2. O. der Gruppen G_3^2.

Eine dritte Klasse von ausgezeichneten inv.n Diffgl.n 2. O. einer G_3^2 wird durch folgende Definition geliefert: $G_{\max}(F)$ bezeichne die größte von inf. Trf.n erzeugte Gruppe eines Gebildes F. Dann sollen die inv.n Diffgl.n 2. O. einer G_3^2, welche die $G_{\max}(G_3^2)$ gestatten, *fix* heißen.

Die fixen Diffgl.n sind erst recht singulär; sie fallen mit den singulären zusammen, falls diese in diskreter Anzahl vorhanden sind, also wenn die G_3^2 eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$, $\mathcal{G}_3^c$ ($c \neq \infty$) oder $\widehat{\mathcal{G}}_3$ ist. Desgleichen sind alle einzähligen inv.n Diffgl.n 2. O. einer G_3^2 *fix*, sobald sie in diskreter Anzahl auftreten, d. h. wenn die G_3^2 eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ oder $\mathcal{G}_3^c$ ist. In diesen Fällen sind die einzähligen Diffgl.n natürlich auch singulär. Daraus folgt überhaupt, daß die beiden singulären und die beiden einzähligen Diffgl.n einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ zusammenfallen, ebenso die einzählige mit der singulären Diffgl. einer $\mathcal{G}_3^c$ ($c \neq \infty$).

Die $G_{\max}$ der verschiedenen Typen G_3^2 wollen wir kurz betrachten. Die $G_{\max}$ der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42 b) ist die proj.e G_4 (43), erzeugt von den inf. Trf.n (42 b) und der kommutablen inf. Trf. $xp + yq$. Die einzigen inv.n Diffgl.n 2. O. von (43) sind $y'' = 0$, $y'' = \infty$; diese sind daher die singulären Diffgl.n von (42 b), wie man auch leicht direkt erkennt.

Die $G_{\max}$ einer $\mathcal{G}_3^c$ (42 c) mit $c \neq \infty$ oder $ab \neq 0$ ist die G_5

$$1,\ y',\ axy' - by;\ y'^{\frac{b}{b-a}};\ xy' - y\ \ (ab \neq 0); \tag{170}$$

die Dualität (115) verwandelt die inf. B.T.n (170) — abgesehen von der Reihenfolge — in

$$q,\ xq,\ x^{\frac{b}{b-a}}q;\ yq,\ (a-b)xp - byq\ \ (ab \neq 0), \tag{170'}$$

d. h. die G_5 (170) gehört zu derjenigen Klasse von B.T.s-Gruppen, welche mit einer Gruppe der Form

$$Q_1)(x)q,\ Q_2)(x)q,\ Q_3)(x)q\ ;\ yq,\ p \tag{171}$$

ähnlich sind [24]). (Die inv.e Diffgl. 3. O. der Gruppe (170′) kann dann und nur dann die Form $y''' = 0$ erhalten, wenn $c = \frac{5}{4}$ oder $c = -1$ ist [25]).) $y'' = \infty$ ist die einzige inv.e Diffgl. 2. O. einer Gruppe (171).

Wenn $ab = 0$, ist die Gruppe (170) nur noch viergliedrig; trotzdem ist die $G_{\max}$ der $\mathcal{G}_3^\infty$ (42 c) mit $b = 0$ wieder fünfgliedrig; sie ist nämlich erzeugt von den inf. Trf.n

$$1,\ y',\ xy';\ xy' - y,\ \log y', \tag{172}$$

[24]) A. a. O. [20]), § 1, 4.

[25]) A. a. O. [20]), Theorem 5.

welche in der vorstehenden Reihenfolge bei Ausübung der B.T. $x = e^{-\mathfrak{x}}\mathfrak{y}'$, $y = \mathfrak{y}' - \mathfrak{y}$, $y' = e^{\mathfrak{x}}$ übergehen in

(172′) $$1,\ e^{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{y}';\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{x};$$

(172′) ist wieder eine Gruppe der Form (171).

Auch die $G_{\max}$

(173) $$1,\ y',\ xy' - (x+y);\ e^{y'};\ xy' - y$$

der $\widehat{\mathcal{G}}_3$(42 f) ist fünfgliedrig und geht vermöge der Dualität (115) in (172′) über (die inv.e Diffgl. 3. O. $y''' - y'' = 0$ der G_5 (172′) kann nicht die Form $y''' = 0$ erhalten).

Die $G_{\max}$ der $\bar{\mathcal{G}}_3$ (42 g) endlich ist die irrreduzible G_7

(174) $$1,\ x,\ y';\ xy',\ y;\ x^2;\ y'^2.$$

Unter den inv.n Diffgl.n 2. O. einer $\bar{\mathcal{G}}_3$ ist also keine fix.

Die einzige inv.e Diffgl. 2. O. jeder der Gruppen (170), (172) und (173) ist $y'' = 0$; folglich ist $y'' = 0$ die *singuläre* Diffgl. jeder $\mathcal{G}_3^c$(42 c) mit $ab \neq 0$ und der $\widehat{\mathcal{G}}_3$(42 f), dagegen die *einzählige* Diffgl. der $\mathcal{G}_3^\infty$ (42 c) mit a = 0 oder b = 0 (was auch die Rechnung bestätigt).

Mit der Schreibung $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\alpha, \beta)$; $\mathcal{G}_3^c(\varepsilon)$, $\widehat{\mathcal{G}}_3(\varepsilon)$ wollen wir zum Ausdruck bringen, daß $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$; $y'' + \varepsilon = 0$ die fixen inv.n Diffgl.n 2. O. der betreffenden $\widetilde{\mathcal{G}}_3$; $\mathcal{G}_3^c$; $\widehat{\mathcal{G}}_3$ sind.

§ 13. Die Möglichkeiten, wie eine G_3^2 in einer $\mathcal{G}_8$ enthalten sein kann.

Nun wird es notwendig, daß wir alle polaren Paare von inv.n Diffgl.n 2. O.

(175) $$y'' + ae^{\tau-\sigma} = 0,\ y'' + be^{\tau-\sigma} = 0$$

der Gruppen (42 b, c, f, g) bestimmen. Die Größen σ, τ in den entsprechenden Systemen (55) dieser Gruppen besitzen folgende Werte:

(176) (b) $\sigma = -2\log(xy' - y)$, $\tau = \log(xy' - y)$ (c) $\sigma = -\log y'$, $\tau = \frac{a}{a-b}\log y'$

(f) $\sigma = 0$, $\tau = -y'$ (g) $\sigma = 0$, $\tau = 0$,

so daß die Größen ε in (58) durch

(177) (b) $\varepsilon = a(xy' - y)^3$ (c) $\varepsilon = ay'^{\frac{2a-b}{a-b}}$ (f) $\varepsilon = ae^{-y'}$ (g) $\varepsilon = a$

gegeben sind. Die Relationen (24) liefern bezüglich zweier Größen (177) die folgenden Bedingungen für die Parameter a, b in (175) (am bequemsten, nachdem die beiden zu untersuchenden Diffgl.n der Dualität (115) unterworfen sind):

(178) (b) $a'\left(1 + \frac{2a'}{b'-a'}\right) = 0$, $\frac{1}{b'-a'}\left(1 + \frac{2a'}{b'-a'}\right) = 0$ (c) $\frac{ab(2a-b)(2b-a)}{b'-a'} = 0$

(f) $\frac{1}{b'-a'} = 0$ (g) a, b beliebig $\qquad (aa' = bb' = 1)$.

(178b): Entweder $1 + \frac{2a'}{b'-a'} = 0$, also $b = -a$, oder $a' = 0$, $\frac{1}{b'-a'} = 0$, also $a = \infty$, $b = 0$. Polar sind also die ∞^1 Paare

(179) $$y'' + a(xy' - y)^3 = 0,\ y'' - a(xy' - y)^3 = 0\ (a \neq 0, \infty)$$

sowie das Paar $y'' = 0$, $y'' = \infty$ der beiden singulären Diffgl.n der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42 b).

(178c): Wenn a = 0 oder b = 0, d. h. c = ∞ oder wenn 2a − b = 0 oder 2b − a = 0, d. h. $c = \frac{5}{4}$, können a, b beliebig gewählt werden. In den übrigen Fällen muß entweder

b' oder $a' = \infty$, d. h. entweder b oder $a = 0$ sein, d. h. eine Diffgl. muß die fixe sein, während die andere eine beliebige inv.e Diffgl. 2. O. sein darf.

(178 f): Von zwei polaren inv.n Diffgl.n 2. O. einer $\widehat{\mathcal{G}}_3$ ist die eine singulär, die andere darf irgendeine inv.e Diffgl. 2. O. sein.

(178 g): Jedes Paar inv.r Diffgl.n 2. O. einer $\overline{\mathcal{G}}_3$ ist polar.

Für das Enthaltensein einer gegebenen $\widetilde{\mathcal{G}}_3$; $\mathcal{G}_3^c$; $\widehat{\mathcal{G}}_3$, $\overline{\mathcal{G}}_3$ in einer $\mathcal{G}_8$ gibt es also folgende Möglichkeiten:

(180)

(I)	$\widetilde{\mathcal{G}}_3(\check{\alpha}, \check{\beta})$	$<$	$\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$	$(\alpha, \beta \neq \check{\alpha}, \check{\beta})$ $(\infty^1 \mathcal{G}_8)$
			$\mathcal{G}_8(\check{\alpha}, \check{\beta})$	(die ausgezeichnete $\mathcal{G}_8$)
(II)	$\mathcal{G}_3^c(\check{\varepsilon})$	$<$	$\mathcal{G}_8(\check{\varepsilon}, \varepsilon)$	$(c \neq \frac{5}{4}, \infty)$ $(\infty^1 \mathcal{G}_8)$
(III)	$\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}(\check{\varepsilon})$	$<$	$\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$	$(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ $(\infty^2 \mathcal{G}_8)$
			$\mathcal{G}_8(\check{\varepsilon}, \varepsilon)$	$(\infty^1$ ausgezeichnete $\mathcal{G}_8)$
(IV)	$\mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon})$	$<$	$\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$	$(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ $(\infty^2 \mathcal{G}_8)$
			$\mathcal{G}_8(\check{\varepsilon}, \varepsilon)$	$(\infty^1$ ausgezeichnete $\mathcal{G}_8)$
(V)	$\widehat{\mathcal{G}}_3(\check{\varepsilon})$	$<$	$\mathcal{G}_8(\check{\varepsilon}, \varepsilon)$	$(\infty^1 \mathcal{G}_8)$
(VI)	$\overline{\mathcal{G}}_3$	$<$	$\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$	$(\infty^2 \mathcal{G}_8)$

Ist umgekehrt eine $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ gegeben, dann können Gruppen G_3^2 auf folgende Weise in ihr vorkommen:

(181)

(a) $\tilde{\mathcal{G}}_3(\check{\alpha}, \check{\beta})$ $(\check{\alpha}, \check{\beta} \neq \alpha, \beta)$ (∞^5) (b) $\tilde{\mathcal{G}}_3(\alpha, \beta)$ (∞^4)

(c) $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ (2 mal ∞^4) (c*) $\mathcal{G}_3^c(\beta)$ (2 mal ∞^4)

(d) $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}(\check{\varepsilon})$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)(\infty^5)$ (e) $\mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon})$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ (∞^5)

(f) $\widehat{\mathcal{G}}_3(\alpha)$ (∞^4) (f*) $\widehat{\mathcal{G}}_3(\beta)$ (∞^4) (g) $\overline{\mathcal{G}}_3$ (∞^3).

Die verschiedenen Untergruppentypen G_3^2 der Tabelle (181) entsprechen den proj.n Typen (42). Die proj.e $\mathcal{G}_8$ kann nämlich nicht die ausgezeichnete $\mathcal{G}_8$ der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42 a) sein, weil (42 a) in keiner anderen proj.n Gruppe enthalten ist als in sich und in der $\mathcal{G}_8(0, \infty)$ selber, während die ausgezeichnete $\mathcal{G}_8$ einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ zugleich deren kommutable inf. Trf., also deren $G_{\max}$ umfaßt. Die fixen Diffgl.n der Gruppen (42 d, e) sind $y'' - 1 = 0$ und $y'' + \frac{y'}{x} = 0$, d. h. von $y'' = 0$, $y'' = \infty$ verschieden.

Die Analogie der Tabellen (42) und (181) läßt sich noch weiter verfolgen, wenn wir erwägen, daß es zu einer beliebigen $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ ebenfalls ∞^8 B.T.n geben muß, welche die Diffgl.n $y'' + \alpha = 0$, $y'' + \beta = 0$ miteinander vertauschen und welche wir folglich die *bezüglich der* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ *dualistischen* oder kürzer die (α, β)-*dualistischen B.T.n* nennen wollen [26]). Dann ist offenbar jede Gruppe (181 c; f) zu jeder Gruppe (181 c*; f*) (α, β)-dualistisch; die übrigen Gruppen (181) sind zu sich selber (α, β)-dualistisch.

§ 14. Die charakteristischen Relationen für die Basen $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ der verschiedenen Untergruppentypen G_3^2 einer $\mathcal{G}_8$ (α, β).

Hiermit haben wir die notwendigen Vorbereitungen getroffen, um die verschiedenen Untergruppentypen (181) von G_3^2 einer $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ durch Angabe der charakteristischen Relationen für die Basen $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ ihrer Defgl.n (85) beschreiben zu können. Zu dem Zweck haben wir lediglich die Tabelle (181) gemäß Theorem 2 mit der Tabelle (146) und den Formeln (152) und (168) zu kombinieren. Wir gehen die einzelnen Typen (181) der Reihe nach durch.

[26]) A. a. O. [1]), § 2, **3**.

(181 a): Aus (146) und (70) folgt $\chi = \psi = 0$; ferner darf (152) weder für $\varepsilon = \alpha$ noch $\varepsilon = \beta$ erfüllt sein, d. h. es ist $\mathsf{AB} \neq 0$. Aus (78) folgt dann $\Gamma = 0$. Von den Relationen (91), (92) bleiben wegen (93) nur (92 a_1, a^*_1) übrig.

(181 b): Wieder wird $\chi = \psi = 0$, ferner $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 0$, weil (152) durch $\varepsilon = \alpha$ und $\varepsilon = \beta$ befriedigt wird. Mithin muß nach (146) $\Gamma \neq 0$ sein. Die Relationen (91), (92) bestehen dann von selbst.

(181 c): Da (152) durch $\varepsilon = \alpha$ erfüllt wird, muß zunächst $\mathsf{A} = 0$ sein. Nach (146) ist dann auch $\Gamma = 0$. Da ferner $\mathsf{N}(\alpha) = 0$, so muß nach (168) $\mathsf{A}(\frac{1}{4}) = 0$ werden, d. h. es ist wegen $\mathsf{A} = 0$ auch $\chi = 0$. Somit ist nach (146) $\mathsf{B}(\frac{1}{4}) \neq 0$. Die Relationen (70) sind von selbst erfüllt; wegen (93) verbleiben von den Relationen (91), (92) nur noch (91 a*) und (92 a^*_1). Wegen (146) ist die Bedingung $\mathsf{B} = 0$ mit $c = \infty$ gleichbedeutend. Wir können übrigens für die Typen (181 c) die Parameter c explizit angeben. Nach (176 c) wird nämlich bei den $\mathcal{G}_3^c$ (42 c):

$$(182) \qquad \psi = \frac{a+b}{a-b}\frac{1}{y'}, \quad \mathsf{B} = \frac{-ab}{(a-b)^2}\frac{1}{y'^2}, \text{ also nach (49): } c = -\frac{\mathsf{B}(\frac{1}{2})}{\mathsf{B}}.$$

Auf Grund der Trf.s-Formeln (88), (89) muß jedoch (182_3) für beliebige, durch ein System (85) definierte $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ gelten. (182_3) zeigt wieder, daß dann und nur dann $c = \infty$, wenn $\mathsf{B} = 0$ und weiterhin, daß $c = -1$, sobald $\psi = 0$. In letzterem Falle ist nach (49) $a : b = -1$. Die $\mathcal{G}_3^{-1}$ sind die mit der G_3 der euklidischen Bewegungen ähnlichen B.T.s-Gruppen. *Wenn* $c \neq \infty$, *dann ist* (91 a*) *eine Folge von* (92 a*) *und* (182_3).

(181 c*): Die sämtlichen Relationen für diesen Typ werden aus denen für den vorhergehenden Typ durch Ausführung der Substitution (86) erhalten.

(181 d): Da (152) weder von $\varepsilon = \alpha$ noch $\varepsilon = \beta$ befriedigt werden kann, muß $\mathsf{AB} \neq 0$ sein, also nach (146) auch $\Gamma \neq 0$. (78) liefert dann $\Gamma(\frac{2}{9}) = 0$, d. h. $\psi\chi \neq 0$. Aus (70) folgt nunmehr $\mathsf{B}(\frac{2}{9}) = \mathsf{A}(\frac{2}{9}) = 0$. Infolgedessen werden die Relationen (92) von den Relationen (91) nach sich gezogen. Ferner sieht man, daß $\mathsf{A}(\frac{1}{4})\mathsf{B}(\frac{1}{4}) \neq 0$, wie es der Tabelle (146) entspricht.

(181 e): (168) lehrt wegen $\mathsf{N}(\alpha)\mathsf{N}(\beta) \neq 0$: $\mathsf{A}(\frac{1}{4})\mathsf{B}(\frac{1}{4}) \neq 0$; (146) liefert $\mathsf{A} = \mathsf{B} = \Gamma = 0$. Daher wird $\mathsf{A}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\chi^2$, $\mathsf{B}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\psi^2$, d. h. $\chi\psi \neq 0$. Es bleiben dann noch die Relationen (91) zu fordern. Aus $\mathsf{N}(\check{\varepsilon}) = 0$ ergibt sich der folgende Ausdruck für die Größe $\check{\varepsilon}$ der einzähligen inv.n Diffgl. $y'' + \check{\varepsilon} = 0$:

$$(183) \qquad \boxed{\frac{\check{\varepsilon}-\alpha}{\check{\varepsilon}-\beta} = \frac{\chi}{\psi} \text{ oder } \check{\varepsilon} = \frac{\beta\chi - \alpha\psi}{\chi - \psi}.}$$

In der Grenze $\beta = \beta_0 \to \infty$ wird (183):

$$(184) \qquad \check{\varepsilon} = \frac{\chi + \alpha\psi}{\psi} = \alpha + \frac{\chi}{\psi}.$$

(181 f): (146) liefert $\mathsf{A}(\frac{1}{4}) = \mathsf{B}(\frac{1}{4}) = \Gamma(\frac{1}{4}) = 0$; da (152) für $\varepsilon = \alpha$ erfüllt sein muß, ist $\mathsf{A} = 0$ und somit auch $\chi = 0$. Daraus folgt weiterhin $\Gamma = 0$, jedoch $\mathsf{B} \neq 0$, mithin auch $\psi \neq 0$. Zu fordern bleiben jetzt nur noch die Relationen (91 a*).

(181 f*): Die betreffenden Relationen unterscheiden sich von denen zu (181 f) nur durch die Substitution (86).

(181 g): (146) zeigt, daß $\mathsf{A} = \mathsf{B} = \Gamma = \chi = \psi = 0$.

Wir stellen die gewonnenen Ergebnisse zusammen und berücksichtigen zugleich den Grenzfall $\beta = \infty$:

Theorem 3. *Die verschiedenen, durch Systeme* (85) [(125)] *definierten Untergruppentypen* G_3^2 *einer* $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ [$\mathcal{G}_8(\alpha, \infty)$] *sind charakterisiert durch die nachstehenden Beziehungen zwischen* σ, τ:

(185)

(a) $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\check{\alpha}, \check{\beta})(\check{\alpha}, \check{\beta} \neq \alpha, \beta) : \chi = \psi = \Gamma = 0, \mathsf{AB} \neq 0$; dazu noch (92 a_1, a^*_1) [(69 a_1, a^*_1)].

(b) $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\alpha, \beta) : \chi = \psi = \mathsf{A} = \mathsf{B} = 0, \Gamma \neq 0$.

(c) $\mathcal{G}_3^c(\alpha) : \chi = \mathsf{A} = \Gamma = 0, \mathsf{B}(\frac{1}{4}) \neq 0; \ c = -\dfrac{\mathsf{B}(\frac{1}{2})}{\mathsf{B}}$; dazu noch (91 a*), (92 a^*_1) [(62 a*), (69 a^*_1)].

(c*) $\mathcal{G}_3^c(\beta) : \psi = \mathsf{B} = \Gamma = 0, \mathsf{A}(\frac{1}{4}) \neq 0; \ c = -\dfrac{\mathsf{A}(\frac{1}{2})}{\mathsf{A}}$; dazu noch (91 a), (92 a_1) [(62 a), (69 a_1)].

(d) $\mathcal{G}_3^5(\check{\varepsilon})(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta) : \mathsf{A}(\frac{2}{9}) = \mathsf{B}(\frac{2}{9}) = \Gamma(\frac{2}{9}) = 0, \ \chi\psi \neq 0$; dazu noch (91) [(62)].

(e) $\mathcal{G}_3^\infty(\check{\varepsilon})(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta) : \mathsf{A} = \mathsf{B} = \Gamma = 0, \ \chi\psi \neq 0$; dazu noch (91) [(62)].

(f) $\widehat{\mathcal{G}}_3(\alpha) : \chi = \mathsf{A} = \Gamma = \mathsf{B}(\frac{1}{4}) = 0, \ \mathsf{B} \neq 0$; dazu noch (91 a*) [(62 a*)].

(f*) $\widehat{\mathcal{G}}_3(\beta) : \psi = \mathsf{B} = \Gamma = \mathsf{A}(\frac{1}{4}) = 0, \ \mathsf{A} \neq 0$; dazu noch (91 a) [(62 a)].

(g) $\mathcal{G}_3 : \chi = \psi = \mathsf{A} = \mathsf{B} = \Gamma = 0$.

Unter χ, ψ, A, B, Γ *sind jeweils die Größen* (87) *oder* (127) *zu verstehen.*

Noch eine Bemerkung wollen wir anfügen. Wenn es zu einer der Untergruppen (185) in der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ ∞^i $(i = 3, 4, 5)$ gleichberechtigte gibt, dann dürfen nach § 5, 2 von den Op.n (99) bzw. $S(99)$ (S = Substitution (86)) nur i unabhängig bleiben; mithin müssen vermöge der Relationen (185) für den betreffenden Untergruppentyp zwischen den 8 Op.n (99) bzw. $S(99)$ gerade $8 - i$ Gleichungen bestehen. Daß dies in der Tat zutrifft, ist unschwer zu bestätigen.

§ 15. Die von den Integralkurven $\mathfrak{C}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\beta$ induzierten Imprimitivitätszerlegungen und die von ihnen gestatteten Untergruppen der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$.

Die Geraden und Punkte der Ebene als Lösungen der Diffgl.n $\mathfrak{y}'' = 0$, $\mathfrak{y}'' = \infty$ gehen vermöge der B.T.n (14), (21) über in die Integralkurven $\mathfrak{C}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\beta$ der Diffgl.n (22). (Unter Kurve soll hier der allgemeinere Begriff einer Linienelement-M_1 verstanden sein.) Der vereinigten Lage von Gerade und Punkt entspricht die Berührungslage zweier Kurven $\mathfrak{C}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\beta$. Jede $\mathfrak{C}_\alpha^0$ wird von ∞^1 $\mathfrak{C}_\beta$ berührt, deren jede ihrerseits von ∞^1 $\mathfrak{C}_\alpha$ berührt wird. Diese ∞^1 Scharen von ∞^1 $\mathfrak{C}_\alpha$ machen zusammen wieder die Schar aller ∞^2 $\mathfrak{C}_\alpha$ aus. Folglich induziert jede Kurve $\mathfrak{C}_\alpha^0$ eine Impr.Z. $\{\alpha, \lambda\}$, ebenso natürlich jede $\mathfrak{C}_\beta^0$ eine Impr.Z. $\{\beta, \mu\}$ (s. § 10). Gemäß (161) wird die größte Untergruppe der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$, welche eine $\mathfrak{C}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{C}_\beta$, oder, w. d. i., die zugehörige Impr.Z. $\{\alpha, \lambda\}$ bzw. $\{\beta, \mu\}$ inv. läßt, definiert durch die Defgl.n

$$(186) \qquad \boxed{U_{\alpha\alpha} + \alpha_2 U_\alpha + \alpha_3 U = 0, \ U_{\beta\beta} + \beta_2 U_\beta + \beta_3 U = 0}$$

der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ und die erste bzw. zweite der folgenden Gleichungen

$$(187) \qquad \boxed{U_{3\alpha} + \lambda U_{2\alpha} - \lambda_2 U_\alpha + \lambda_\alpha U_2 - \lambda_3 U = 0}$$

$$(187^*) \qquad \boxed{U_{3\beta} + \mu U_{2\beta} - \mu_2 U_\beta + \mu_\beta U_2 - \mu_3 U = 0.}$$

Die Gruppen (186), (187) und (186), (187*), welche wir mit $\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda)$ und $\mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)$ bezeichnen, entsprechen den mit der affinen $\mathcal{G}_6$ proj. gleichberechtigten und den zu diesen dualistischen Gruppen. Die Größen λ, μ sind daher dieselben wie die gleichbezeichneten Größen in der unter [1]) zitierten Abhandlung [27]); diese Größen befriedigen die Relationen [28]):

[27]) A. a. O. [1]), Gleichungen (146), (149_6).

[28]) A. a. O. [1]), (94) und (150) (vgl. hierzu a. a. O. [8])).

$$(188)\qquad \boxed{\begin{aligned}\lambda_\alpha &= -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3,\\ \lambda_{2\alpha} &= -\lambda\lambda_2 + \overline{\omega}\lambda^3 - \overline{\alpha}\lambda^2 + (\tfrac{1}{2}\,\Lambda - \alpha_{22})\lambda - \tfrac{1}{6}\,\mathsf{M} - \alpha_{23},\\ \lambda_{22} &= -3\overline{\omega}\lambda\lambda_2 + \overline{\alpha}\lambda_2 - \overline{\omega}^2\lambda^3 + (\overline{\omega}\overline{\alpha} - \overline{\omega}_2)\lambda^2 + (\overline{\omega}_3 + \overline{\alpha}_2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{\omega}\,\Lambda)\lambda\\ &\quad + \tfrac{1}{6}\,(\overline{\omega}\mathsf{M} - 2(\Lambda_2 + \overline{\alpha}_3)).\end{aligned}}$$

$$(188^*)\qquad \boxed{\begin{aligned}\mu_\beta &= -\mu^2 - \beta_2\mu - \beta_3,\\ \mu_{2\beta} &= -\mu\mu_2 - \overline{\omega}\mu^3 - \bar{\beta}\mu^2 + (\tfrac{1}{2}\,\Lambda^* - \beta_{22})\,\mu - \tfrac{1}{6}\,\mathsf{M}^* - \beta_{23},\\ \mu_{22} &= 3\overline{\omega}\mu\mu_2 + \bar{\beta}\mu_2 - \overline{\omega}^2\mu^3 - (\overline{\omega}\bar{\beta} - \overline{\omega}_2)\mu^2 + (\tfrac{1}{2}\,\overline{\omega}\,\Lambda^* - \overline{\omega}_3 + \bar{\beta}_2)\mu\\ &\quad - \tfrac{1}{6}\,(\overline{\omega}\mathsf{M}^* + 2(\Lambda_2^* + \bar{\beta}_3)).\end{aligned}}$$

Die Größen $\overline{\alpha}$, Λ, M sind in (23) erklärt; $\bar{\beta}$, Λ^*, M^* gehen aus ihnen durch Vertauschung von α, β hervor. Vermöge (24) sind die Systeme (188), (188*) unbeschränkt integrabel und bestimmen ∞^2 Größen λ bzw. μ.

Die größte Untergruppe der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$, welche die ∞^1 Berührungs-$\mathfrak{C}_\beta$ bzw. -$\mathfrak{C}_\alpha$ einer $\mathfrak{C}_\alpha^0(\lambda)$ bzw. $\mathfrak{C}_\beta^0(\mu)$ *einzeln* in Ruhe läßt — d. h. die gemäß (157) zu bestimmende Funktion $I(x, y, y')$ der Impr.Z. $\{\alpha, \lambda\}$ bzw. $\{\beta, \mu\}$ nicht ändert —, wird nach § 10 definiert durch (186) und die erste bzw. zweite der beiden Gleichungen

$$(189)\quad \boxed{U_\alpha = \lambda U} \qquad\qquad (189^*)\quad \boxed{U_\beta = \mu U\,.}$$

Diese $\mathcal{G}_3(\alpha, \beta, \lambda)$ bzw. $\mathcal{G}_3(\beta, \alpha, \mu)$ entsprechen den mit $p, q, xp + yq$ proj. gleichberechtigten bzw. den hierzu dualistischen Gruppen[29]).

Die Durchschnittsgruppe $[\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \lambda), \mathcal{G}_6(\beta, \alpha, \mu)]$, d. h. die größte Untergruppe des Kurvenpaares $\mathfrak{C}_\alpha^0(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta^0(\mu)$ in der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ — welche durch (186), (187), (187*) definiert wird —, ist eine $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \mathcal{G}_5(\beta, \alpha, \mu, \lambda)$ vom Typ (44) oder eine $\mathcal{G}_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \mathcal{G}_4(\beta, \alpha, \mu, \lambda)$ vom Typ (43), je nachdem die Kurven $\mathfrak{C}_\alpha^0(\lambda)$, $\mathfrak{C}_\beta^0(\mu)$ sich *berühren*, wofür die Bedingung

$$(190)\quad \boxed{\mu_2 - \lambda_2 - \overline{\omega}(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + \bar{\alpha}\lambda - \bar{\beta}\mu + \tfrac{1}{4}\,(\Lambda^* - \Lambda) = 0}$$

das analytische Äquivalent ist, oder nicht[30]). Die *Derivierten* dieser $\mathcal{G}_5$ bzw. $\mathcal{G}_4$ sind Gruppen $\overline{\mathcal{G}}_3$ bzw. $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\alpha, \beta)$ (vgl. § 3), deren — nur von α, β, λ, μ abhängende — Defgl.n der Form nach übereinstimmen, wobei jedoch die zugehörigen Größen λ, μ im ersten Falle die Relation (190) befriedigen, im zweiten nicht[31]). Denken wir uns diese Derivierten durch Systeme (85) definiert, dann folgt aus (185b, g) und (168), daß $\mathsf{N}(\alpha) = \mathsf{N}(\beta) = 0$, d. h. — was wir schon wissen — daß jede $\overline{\mathcal{G}}_3$ und $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\alpha, \beta)$ je *eine* Impr.Z. $\{\alpha, r(\alpha)\}$ und $\{\beta, r(\beta)\}$ inv. läßt, welche demnach mit der Impr.Z. $\{\alpha, \lambda\}$ bzw. $\{\beta, \mu\}$ übereinstimmt. Wegen $\chi = \psi = 0$ ergibt sich aus (168)

$$(191)\qquad \boxed{\text{(a)}\ \ \lambda = \sigma_\alpha - \alpha_2 = -\varphi_\alpha \qquad \text{(a*)}\ \ \mu = \tau_\beta - \beta_2 = -\varphi_\beta.}$$

Die Relationen (188), (188*) müssen also eine Folge von (191) und $\chi = \psi = \mathsf{A} = \mathsf{B} = 0$ sein, während die Bedingung $\Gamma = 0$ vermöge dieser Relationen mit (190) gleichbedeutend sein muß.

Wenn $\beta = \infty$, dann reduziert sich (186) auf

$$(192)\qquad U_{\alpha\alpha} + \alpha_2 U_\alpha + \alpha_3 U = 0,\ U_{22} = 0,$$

[29]) A. a. O. [1]), (127) und (149_3).
[30]) A. a. O. [1]), Theorem 3.
[31]) A. a. O. [1]), Satz 19.

während (187) sowie (189) ihre Form behalten; mit (187*) und (189*) nehme man gemäß Satz 4 die Substitution $\mathcal{S}$ ((s. 13)) vor $\left(\text{wobei } \mu' = -\frac{\mu}{\beta}\right)$ und setze $\beta' = 0$:

$$(193) \qquad -U_{32} + \mu' U_{12} - \mu_1' U_2 + \mu_2' U_1 + \mu_3' U = 0,$$

$$(\overline{193}) \qquad U_2 = \mu' U.$$

Im System (188) bereitet der direkte Grenzübergang $\beta \to \infty$ keine Schwierigkeit; das System (188*) unterwerfe man der Substitution $\mathcal{S}$ und setze $\beta' = 0$; dann reduzieren sich die Systeme (188), (188*) auf [32])

$$(194) \qquad \begin{aligned} \lambda_\alpha &= -\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_3, \\ \lambda_{2\alpha} &= -\lambda\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\lambda - \tfrac{1}{3}\alpha_{23} - \tfrac{1}{6}\alpha_{22\alpha}, \\ \lambda_{22} &= -\tfrac{1}{3}\alpha_{222}, \end{aligned}$$

$$(194^*) \qquad \begin{aligned} \mu_2' &= -\mu'^2, \\ \mu_{12}' &= -\mu'\mu_1' + \alpha\mu'^3 - \alpha_2\mu'^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\mu' - \tfrac{1}{6}\alpha_{222}, \\ \mu_{11}' &= -3\alpha\mu'\mu_1' + \alpha_2\mu_1' - \alpha^2\mu'^3 + (\alpha\alpha_2 - \alpha_1)\mu'^2 \\ &\quad + (2\alpha_{21} - \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha_{22})\mu' - \tfrac{1}{3}(2\alpha_{221} - \alpha_{212}) + \tfrac{1}{6}\alpha\alpha_{222}. \end{aligned}$$

Mit der Relation (190) gehen wir am besten auf dem Weg $\beta = \beta_{0)}$ zur Grenze $\beta = \infty$ über und erhalten — mit Berücksichtigung von (188*$_1$) — [33])

$$(195) \qquad \mu_1' + \lambda_2 + \alpha\mu'^2 - \lambda\mu' - \alpha_2\mu' + \tfrac{1}{2}\alpha_{22} = 0.$$

Die Gleichungen (191) vereinfachen sich durch diesen Grenzübergang zu

$$(196) \qquad \text{(a)}\ \lambda = \sigma_\alpha - \alpha_2 = -\varphi_\alpha \qquad \text{(a*)}\ \mu' = \tau_2 = -\varphi_2.$$

§ 16. Die mit der äquiformen G_4 der Ebene ähnlichen Gruppen von Berührungstransformationen und ihre Untergruppen $\mathcal{G}_3^c$.

1. Jede Gruppe (42c) läßt an Punkten nur die unendlich fernen Punkte der x- und y-Achse in Ruhe. Daher wird jede $\mathcal{G}_3^c(\alpha) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ von gerade zwei Kurven $\mathfrak{C}_\beta(\mu_{i)})$ $(i = 1, 2)$ gestattet und somit auch von der Berührungs-$\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ der beiden Kurven $(\mu_{1)})$, $(\mu_{2)})$ (wo kein Mißverständnis zu fürchten, wollen wir kürzer (λ) und (μ) anstatt $\mathfrak{C}_\alpha(\lambda)$ und $\mathfrak{C}_\beta(\mu)$ schreiben). Die Berührungs-(λ) zweier $(\mu_{1)})$, $(\mu_{2)})$ ist nach (190) gegeben durch

$$(197) \qquad \lambda = \frac{\omega(\mu_{1)2} - \mu_{2)2})}{\mu_{1)} - \mu_{2)}} - (\mu_{1)} + \mu_{2)}) - \omega\beta.$$

Die dazu (α, β)-dualistische Beziehung ergibt sich durch Vertauschung von α mit β, λ mit μ:

$$(197^*) \qquad \mu = -\frac{\omega(\lambda_{1)2} - \lambda_{2)2})}{\lambda_{1)} - \lambda_{2)}} - (\lambda_{1)} + \lambda_{2)}) + \omega\bar{\alpha};$$

(197*) bestimmt die Berührungs-(μ) zweier $(\lambda_{1)})$, $(\lambda_{2)})$.

Denken wir uns die $\mathcal{G}_3^c(\alpha) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ durch ein System (85) definiert, dann drücken sich die Größen $\mu_{1)}$, $\mu_{2)}$ und die zugehörige Größe λ in (197) folgendermaßen durch $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ aus (wegen (168) und (185c)):

$$(198) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\text{(a)}\ \mu_{i)} = -\tfrac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi) + (-1)^i \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})} \qquad (i = 1, 2) \\ &\text{(b)}\ \lambda = \sigma_\alpha - \alpha_2. \end{aligned}}$$

[32]) A. a. O. [1]), (82) und (171).

[33]) A. a. O. [1]), (173).

Die Größen $\mu_{1)}$, $\mu_{2)}$, λ hängen nach (97$_2'$) nur von σ, nicht von τ ab. Die zu (198) (α, β)-dualistischen Formeln bezüglich einer $\mathcal{G}_3^c(\beta)$ der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ lauten

(198*)
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(a)}\ \ \lambda_{i)} = -\tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi) + (-1)^i \sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})} \qquad (i = 1,2)\\ \text{(b)}\ \ \mu = \tau_\beta - \beta_2.\end{array}}$$

Der Grenzübergang $\beta \to \infty$ liefert an Stelle von (197), (197*) die Gleichungen

(199) $\lambda = \dfrac{\mu'_{1)1} - \mu'_{2)1}}{\mu'_{1)} - \mu'_{2)}} + \alpha(\mu'_{1)} + \mu'_{2)}) - \alpha_2$ (199*) $\mu' = \dfrac{\lambda_{1)2} - \lambda_{2)2}}{\lambda_{1)} - \lambda_{2)}}$

(welche einfacher direkt aus (195) abgelesen werden können); die Relationen (198), (198*) werden in der Grenze

(200) (a) $\mu'_{i)} = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 + (-1)^i \sqrt{\mathsf{B}(\tfrac{1}{4})}$ $(i = 1, 2)$ (b) $\lambda = \sigma_\alpha - \alpha_2$

(200*) (a) $\lambda_{i)} = -\tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \alpha_2) + (-1)^i \sqrt{\mathsf{A}(\tfrac{1}{4})}$ $(i = 1, 2)$ (b) $\mu' = \tau_2$.

2. Die Transformationen der $\infty^1 \mathcal{G}_3^c(42c)$ zusammen bilden die von den inf. Trf.n

(201) $$p,\ q,\ xp - yq;\ xp + yq$$

erzeugte viergliedrige Gruppe, welche mit der äquiformen proj. gleichberechtigt ist; (201) ist die größte von inf. Trf.n erzeugte proj.e Gruppe der unendlich fernen Punkte der x- und y-Achse. Die B.T.s-Gruppen vom Typ (201) wollen wir mit $\breve{\mathcal{G}}_4$ bezeichnen, genauer mit $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ $(= \breve{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha))$, um anzudeuten, daß jede $\breve{\mathcal{G}}_4$ genau zwei, und zwar zueinander polare Diffgl.n 2. O. inv. läßt. Innerhalb einer $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ wird eine bestimmte unter den ∞^4 Untergruppen $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ ausgesondert durch Angabe ihrer beiden inv.n $(\mu_{i)})$ $(i = 1, 2)$. Entsprechend sind die zu den $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ (α, β)-dualistischen $\breve{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha)$ durch ihre inv.n $(\lambda_{i)})$ $(i = 1, 2)$ bestimmt. Wir schreiben daher auch genauer $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$ und $\breve{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \lambda_{1)}, \lambda_{2)})$.

Jede $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ enthält $\infty^1 \mathcal{G}_3^c(\alpha)$, und zwar immer *zwei* $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ $(c \neq -1)$, dagegen *eine* $\mathcal{G}_3^{-1}(\alpha)$. Umgekehrt steckt jede $\mathcal{G}_3^c(\alpha) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ in einer einzigen $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$, welche durch die Formeln (198a) geliefert wird. Die beiden $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ $(c \neq -1)$ einer $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ werden durch jede der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ angehörende Trf., welche die inv.n $(\mu_{i)})$ $(i = 1, 2)$ der $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ vertauscht, ineinander übergeführt (s. § 3).

Die $\infty^1 \mathcal{G}_3^c(\alpha)$ einer $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$ müssen nun bestimmt werden können durch Diffgl.n für die Größen σ, τ. Lösen wir (198) nach σ_α, σ_β auf:

(202) $$\sigma_\alpha = \lambda + \alpha_2,\ \sigma_\beta = -(\mu_{1)} + \mu_{2)} + \omega\pi),$$

dann muß (202) vermöge (197), (188*) bezüglich der Größe σ integrabel sein, wozu gehört, daß die Identitäten (12) durch $f = \sigma$ befriedigt werden. Sonst würden sich nämlich durch Einsetzen von $f = \sigma$ in (12) gewisse Relationen für $\mu_{1)}, \mu_{2)}$ einstellen, welche nicht schon aus (188*) folgen — während andererseits die Größen $\mu_{i)}(i = 1, 2)$ keinen anderen Bedingungen außer (188*) unterliegen.

Daraus ist zu ersehen, daß die Größe σ den Parameter c gar nicht enthält (das läßt sich übrigens auch direkt auf Grund von (176c$_1$) und (85$_1'$) erkennen). Mithin müssen die Gleichungen (85a, b$_1$) für sämtliche $\mathcal{G}_3^c(\alpha) < \breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$ und somit auch für diese $\breve{\mathcal{G}}_4$ selber gelten. Mittels (85a, b$_1$) lassen sich alle Op.n von M durch die vier Op.n M, M_α, M_β, $M_{\beta\alpha}$ ausdrücken, zwischen welchen daher keine Beziehungen mehr statt-

finden dürfen. Das will aber besagen, *daß die* $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$ *durch* (85a, b$_1$) *definiert wird.* Wir können eine $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ demnach auch durch Angabe der zugehörigen Größe σ festlegen, was wir durch die Schreibweise $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \sigma)$ zum Ausdruck bringen wollen.

Da es $\infty^4 \breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \sigma)$ in der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ gibt, muß die Größe σ so vielen Diffgl.n Genüge leisten, daß außer σ_0 selber noch vier Op.n von σ willkürlich bleiben. Nach (97) und (185c) haben wir für σ zunächst die Relationen $\mathsf{A} = \Gamma = 0$. Ferner sind — wie für alle G_3^2 — die Beziehungen (100) und (103) erfüllt, welche letzteren wegen $\chi = \mathsf{A} = 0$ (s. (185c))

$$\boxed{\Sigma_{1)} = \Sigma_{2)} = 0} \tag{203}$$

lauten, also von τ frei sind. Vermöge $\mathsf{A} = \Gamma = 0$, (100), (203) können nun tatsächlich sämtliche Op.n von σ durch $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}$ ausgedrückt werden. Darin liegt, wenn wir nachträglich den Grenzfall $\beta = \infty$ mit berücksichtigen, das

Theorem 4. *Die allgemeinste B.T.* $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ [*P.T.* $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \infty)$] *ist charakterisiert durch ein System* (85a, b$_1$) [(125a, b$_1$)], *wobei* σ *den Beziehungen* (100) [(131)], (203) *sowie*

$$\mathsf{A} = \Gamma = 0, \ \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) \neq 0 \tag{204}$$

genügt. Die (α, β)*-dualistischen* $\breve{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha)$ [(α, ∞)*-dualistischen* $\breve{\mathcal{G}}_4(\infty, \alpha)$] *werden durch Systeme* (85a, b$_2$) [(125a, b$_2$)] *mit den Diffgl.n* (104) [(131*)] *und*

$$\mathsf{B} = \Gamma = 0, \ \mathsf{T}_{1)} = \mathsf{T}_{2)} = 0, \ \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) \neq 0 \tag{205}$$

für τ *definiert. Unter* $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \mathsf{A}(\frac{1}{4}), \mathsf{B}(\frac{1}{4}), \Sigma_{1)}, \Sigma_{2)}, \mathsf{T}_{1)}, \mathsf{T}_{2)}$ *sind hier die Größen* (97) (97′), (103′), (105′), [(129), (129′), (130)] *zu verstehen.*

Die Defgl.n einer $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta)$ können noch in einer anderen Form dargestellt werden; eine $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$ ist ja der Durchschnitt $[\mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \mu_{1)}), \mathcal{G}_6(\alpha, \beta, \mu_{2)})]$ und muß folglich definiert sein durch die Gleichungen (186) zusammen mit zwei Gleichungen (187*) für $\mu = \mu_{i)}$ $(i = 1, 2)$. Subtrahieren wir die beiden letzteren Gleichungen voneinander, so kommt

$$\boxed{U_{2\beta} = \breve{\mu}_2 U_\beta - \breve{\mu}_\beta U_2 + \breve{\mu}_3 U; \ \breve{\mu} = \log(\mu_{1)} - \mu_{2)});} \tag{206}$$

in $\breve{\mu}$ bleibt noch eine additive Konstante willkürlich. Die entsprechende Gleichung für eine $\breve{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \lambda_{1)}, \lambda_{2)})$ lautet

$$\boxed{U_{2\alpha} = \breve{\lambda}_2 U_\alpha - \breve{\lambda}_\alpha U_2 + \breve{\lambda}_3 U; \ \breve{\lambda} = \log(\lambda_{1)} - \lambda_{2)}).} \tag{206*}$$

Durch (186), (206) muß andererseits die $\breve{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$ vollständig definiert sein, da vermöge dieser Gleichungen sämtliche Op.n von U durch die Op.n U, U_1, U_2, U_{22} ausgedrückt werden können. Demnach müssen wir imstande sein, $\mu_{1)}, \mu_{2)}$ aus $\breve{\mu}$ zu bestimmen. Das gelingt in der Tat, wenn wir auf (206$_2$) zweimal die Op. ∂_β ausüben und (188*$_1$) berücksichtigen:

$$\mu_{i)} = -\tfrac{1}{2}(\breve{\mu}_\beta + \beta_2) + (-1)^i \sqrt{\tfrac{1}{2}(\breve{\mu}_{\beta\beta} - \tfrac{1}{2}\breve{\mu}_\beta^2 - 2\beta_3 + \beta_{2\beta} + \tfrac{1}{2}\beta_2^2)} \quad (i = 1, 2); \tag{207}$$

die hierzu (α, β)-dualistischen Gleichungen lauten dann

$$\lambda_{i)} = -\tfrac{1}{2}(\breve{\lambda}_\alpha + \alpha_2) + (-1)^i \sqrt{\tfrac{1}{2}(\breve{\lambda}_{\alpha\alpha} - \tfrac{1}{2}\breve{\lambda}_\alpha^2 - 2\alpha_3 + \alpha_{2\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha_2^2)} \quad (i = 1, 2). \tag{207*}$$

Durch Identifizierung des Systems (186), (206) mit (85a, b$_1$) bekommen wir zwischen $\breve{\mu}$ und σ — entsprechend zwischen $\breve{\lambda}$ und τ — die Beziehungen

$$\breve{\mu} = \sigma + \log\omega \tag{208}$$

$$\breve{\lambda} = \tau + \log(-\omega). \tag{208*}$$

Vermöge (97′) identifiziert man sofort die Formeln (207), (207*) mit (198a), (198*a).

In den Formeln (206)—(208) gehen wir zur Grenze $\beta = \infty$ über. Bezüglich (206) und (207) kommen wir am schnellsten zum Ziel, wenn wir im Anschluß an die Substitution $\mathfrak{S}$, wobei

(209) $$\check{\mu}' = \check{\mu} - \log(-\beta),$$

$\beta' \to 0$ streben lassen:

(210) $$U_{12} = \check{\mu}'_1 U_2 - \check{\mu}'_2 U_1 - \check{\mu}'_3 U;\ \check{\mu}' = \log(\mu'_1 - \mu'_2),$$

(211) $$\mu'_{i)} = -\tfrac{1}{2}\check{\mu}'_2 + (-1)^i \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mu'_{22} - \tfrac{1}{2}\check{\mu}'^2_2)} \qquad (i = 1, 2).$$

(206*) und (207*) behalten ihre Form. Die Gleichungen (208), (208*) vereinfachen sich zu

(212) $$\check{\mu}' = \sigma \qquad\qquad (212^*) \qquad \check{\lambda} = \tau;$$

Dabei haben wir mit (208) die Substitution $\mathfrak{S}$ vorgenommen und unter Beachtung von (122_1) $\beta' = 0$ gesetzt, während wir bezüglich (208*) den Grenzübergang $\beta = \beta_{0)} \to \infty$ gemäß (126) vollzogen haben; ferner ist jedesmal auf der rechten Seite von (212), (212*) die Konstante $\log(-1)$ weggelassen worden.

3. In Ziffer **2** dieses § haben wir bemerkt, daß in einer $\check{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \sigma)$ ∞^1 Untergruppen $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ stecken, von denen jede eine Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ besitzt. Mithin müssen durch die Diffgl.n $\chi = 0$ und (91a*) (s. (185c)), welche gestatten, sämtliche Op.n von τ durch τ_β auszudrücken, diese ∞^1 $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ bestimmt sein. Denn τ muß außer seiner additiven noch eine weitere Konstante enthalten, deren Werte den Untergruppen $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ zugeordnet sind. Folglich müssen die Diffgl.n $\chi = 0$, (91a*) vermöge (100), (203), (204) integrabel sein. Ein Integral der beiden Diffgl.n (91a*) wird durch die Gleichung ($185c_5$) dargestellt, was sofort zutage tritt, wenn wir sie in der Form

(213) $$\mathsf{B}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\frac{1-c}{1+c}\psi^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \psi = 2\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\sqrt{\mathsf{B}\left(\frac{1}{4}\right)}$$

schreiben. Vermöge (100), (203), (204) müssen sich dann die Diffgl.n $\chi = 0$, (213) für τ integrieren lassen, so daß τ bis auf die additive Konstante bekannt ist. Es ist durch (213) offensichtlich gemacht, daß zu jedem Wert $c \neq -1$ *zwei* Größen τ_β, d. h. *zwei* $\mathcal{G}_3^c(\alpha) < \check{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \sigma)$ gehören, zu $c = -1$ jedoch nur *eine*.

Es erübrigt sich, auf die entsprechenden Formeln bezüglich der ∞^1

$$\mathcal{G}_3^c(\beta) < \check{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \tau)$$

oder auf den Grenzfall $\beta = \infty$ näher einzugehen.

§ 17. Die invarianten Imprimitivitätszerlegungen $\{\alpha, \lambda\}, \{\beta, \mu\}$ der übrigen Untergruppen G_3^2 der $\mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$.

1. Bezüglich einer $\widehat{\mathcal{G}}_3(\alpha) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ liefert (168) für $\varepsilon = \alpha, \beta$ nach (185f)

(214) $$\boxed{\nu(\alpha) = \sigma_\alpha - \alpha_2,\ \nu(\beta) = -\tfrac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi).}$$

Nun steckt (42f) in der $\mathcal{G}_5$ (44), also steckt eine $\widehat{\mathcal{G}}_3(\alpha) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ in einer $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$, und es muß daher gelten

(215) $$\boxed{\lambda = \nu(\alpha),\ \mu = \nu(\beta),}$$

wodurch diese $\mathcal{G}_5$ eindeutig bestimmt wird.

Die (α, β)-dualistischen Formeln lauten:

(216) $$\boxed{\nu(\beta) = \tau_\beta - \beta_2,\ \nu(\alpha) = -\tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi)}$$

(217) $$\boxed{\mu = \nu(\beta),\ \lambda = \nu(\alpha).}$$

Der Grenzübergang $\beta = \beta_{0)} \to \infty$ läßt sich in (214)—(217) leicht vollziehen.

2. Bei einer $\mathcal{G}_3^{5_4}(\check{\varepsilon}) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ ist nach (168) und (185d)

$$(218)\quad v_{i)}(\alpha) = -\frac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi) + \frac{(-1)^i}{6}\chi,\quad v_{j)}(\beta) = -\frac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi) + \frac{(-1)^j}{6}\psi \quad (i, j = 1, 2).$$

Da die $\mathcal{G}_3^{5_4}(42\mathrm{d})$ nur die unendlich ferne Gerade und den unendlich fernen Punkt der y-Achse in Ruhe läßt, so wird jede $\mathcal{G}_3^{5_4}(\check{\varepsilon}) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ nur von zwei, und zwar sich berührenden Kurven (λ), (μ) gestattet. Diese $\mathcal{G}_3^{5_4}(\check{\varepsilon})$ stecken also in je einer $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$. Um festzustellen, für welche Indizes i, j $v_{i)}(\alpha) = \lambda$, $v_{j)}(\beta) = \mu$ wird, haben wir die Ausdrücke (218) in (188) und (188*) einzusetzen und zu prüfen, für welche Werte von i, j vermöge (185d) Identitäten herauskommen. Es genügt, die Rechnung für das System (55) und die Relationen (194), (194*) auszuführen, nachdem wir in (218) den Grenzübergang $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ vorgenommen haben. Dabei stellt sich heraus, daß $i = j = 2$ zu wählen ist, daß also die einander berührenden inv.n (λ), (μ) unserer $\mathcal{G}_3^{5_4}(\check{\varepsilon})$ durch

$$(219)\qquad \boxed{\lambda = -\tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi) + \tfrac{1}{6}\chi,\ \mu = -\tfrac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi) + \tfrac{1}{6}\psi}$$

gegeben sind.

3. Für eine $\mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon}) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ wird nach (168) und (185e)

$$(220)\quad v_{i)}(\alpha) = -\frac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi) - \frac{(-1)^i}{2}\chi,\quad v_{j)}(\beta) = -\frac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi) - \frac{(-1)^j}{2}\psi \quad (i, j = 1, 2).$$

Die Gruppe (42e) läßt die uneigentliche Gerade und die y-Achse sowie die uneigentlichen Punkte der x- und y-Achse in Ruhe; diese vier Stücke bilden drei Linienelemente, von denen eines eine ausgezeichnete Rolle spielt. Die Gruppe (42e) ist daher der Durchschnitt dreier proj.er $\mathcal{G}_5$, unter denen (44) die ausgezeichnete ist. Folglich ist jede $\mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon}) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$ der Durchschnitt dreier $\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda_{i)}, \mu_{j)})$ $(i, j = 1, 1; 1, 2; 2, 1)$. Durch (220) sind also die vier inv.n $(\lambda_{k)})$, $(\mu_{k)})$ $(k = 1, 2)$ der $\mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon})$ bestimmt; es bleibt noch festzustellen, für welche Indizeskombination i, j in (220) das ausgezeichnete Berührungspaar $(\lambda_{1)})$, $(\mu_{1)})$ resultiert. Wir haben dazu nur nötig, $v_{i)}(\alpha)$, $v_{j)}(\beta)$ an Stelle von λ, μ in die Berührungsbedingung (190) einzusetzen und zu untersuchen, für welchen Wert von i bzw. j sie von den Paaren $v_{i)}(\alpha)$, $v_{1)}(\beta)$ und $v_{i)}(\alpha)$, $v_{2)}(\beta)$ bzw. $v_{1)}(\alpha)$, $v_{j)}(\beta)$ und $v_2(\alpha)$, $v_{j)}(\beta)$ zugleich befriedigt wird. Es genügt, die Rechnung für die Bedingung (195) durchzuführen, nachdem in (220) der Grenzübergang $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ vollzogen ist. Dabei findet man $i = j = 1$. Also werden die drei

$$\mathcal{G}_5(\alpha, \beta, \lambda_{i)}, \mu_{j)}) > \mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon})\ (\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta;\ i, j = 1, 1;\ 1, 2;\ 2, 1)$$

geliefert durch

$$(221)\qquad \boxed{\begin{aligned} \lambda_{i)} &= -\tfrac{1}{2}(\tau_\alpha + \bar{\omega}\pi + (-1)^i\chi), \\ \mu_{j)} &= -\tfrac{1}{2}(\sigma_\beta + \bar{\omega}\pi + (-1)^j\psi)\ (i, j = 1, 1; 1, 2;\ 2, 1). \end{aligned}}$$

Die $\mathcal{G}_3^{\infty}(\check{\varepsilon})$ ist natürlich auch der Durchschnitt der beiden

$$\check{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)}),\ \check{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \lambda_{1)}, \lambda_{2)}).$$

Das bestätigen unsere Formeln. Denn die Größen $\check{\mu}$, $\check{\lambda}$ dieser $\check{\mathcal{G}}_4$ besitzen nach (221) die Werte $\log\psi$, $\log\chi$, woraus wegen $(95_{1,2})$ in der Tat die Werte (208), (208*) für $\check{\mu}$, $\check{\lambda}$ resultieren (von additiven Konstanten abgesehen), so daß unsere beiden $\check{\mathcal{G}}_4$ durch (85a, b_1) und (85a, b_2) definiert werden.

Allgemein bilden zwei $\check{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \mu_{1)}, \mu_{2)})$, $\check{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \lambda_{1)}, \lambda_{2)})$ einen Durchschnitt $\mathcal{G}_3^{\alpha}(\check{\varepsilon})$ $(\check{\varepsilon} \neq \alpha, \beta)$, sobald die Funktionenpaare $\lambda_{i)}, \mu_{j)}$ $(i, j = 1, 1; 1, 2; 2, 1)$ der Bedingung (190) genügen. Sind die beiden $\check{\mathcal{G}}_4$ in der Form $\check{\mathcal{G}}_4(\alpha, \beta, \sigma)$, $\check{\mathcal{G}}_4(\beta, \alpha, \tau)$ gegeben, dann bilden sie einen derartigen Durchschnitt, sobald σ, τ durch die Relationen (91) verknüpft sind und $\chi\psi \neq 0$ ist (Theorem 4 und (185e)).

4. Bei einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\check{\alpha}, \check{\beta}) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta)$ $(\check{\alpha}, \check{\beta} \neq \alpha, \beta)$ endlich wird nach (168), (185a):

(222) (a) $r(\alpha) = \sigma_{\alpha} - \alpha_2 - \sqrt{A}$ (a*) $r(\beta) = \tau_{\beta} - \beta_2 - \sqrt{B}$.

Die Bedeutung dieser Impr.Z.n läßt sich folgendermaßen erkennen. Jede

$$\widetilde{\mathcal{G}}_3(\check{\alpha}, \check{\beta}) < \mathcal{G}_8(\alpha, \beta) \ (\check{\alpha}, \check{\beta} \neq \alpha, \beta)$$

läßt eine Kurve $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$ in Ruhe, welche Lösung einer nur von α, β abhängigen Diffgl. 5. O. — entsprechend der Diffgl. der Kegelschnitte in der proj.n Geometrie — ist[34]). Die $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$ wird in jedem Punkte von je einer (λ), (μ) berührt. Sie induziert daher eine Zerlegung der Schar der ∞^2 (λ) bzw. (μ) in ∞^1 Scharen, von denen jede die ∞^1 (λ) bzw. (μ) in sich begreift, welche dieselbe Berührungs-$\mathfrak{C}_{\beta}$ bzw. -$\mathfrak{C}_{\alpha}$ der $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$ berühren. Der inv.e K.S. $x^2 - 2y = 0$ der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42a) z. B. induziert diese Zerlegungen der ∞^2 Geraden bzw. Punkte:

(222′) (a) $I = y' + \sqrt{v} = x_0$ (a*) $I^* = x + \sqrt{u} = y_0'$

(s. (280)). Die Irrationalitäten in (222′) treten natürlich nur scheinbar auf. Durch

(222″) (a) $r(0) = (x - y' + \sqrt{v}) : u$ (a*) $r'(\infty) = (y' - x + \sqrt{u}) : v$,

den aus (222) für die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42a) hervorgehenden Gleichungen, werden nach § 10 ebenfalls die Zerlegungen (222′) bestimmt. Also wird allgemein durch (222a) bzw. (222a*) *eine*, nämlich die von der $\mathfrak{K}_{\alpha\beta}$ induzierte Zerlegung der ∞^2 (λ) bzw. (μ) dargestellt.

Dritter Abschnitt.

Die Bogenelemente $\zeta dx + v dy'$, welche eine G_3 von Berührungstransformationen gestatten.

§ 18. Einiges aus der allgemeinen Theorie der Bogenelemente $\zeta dx + v dy'$.

1. Unter einem *Bogenelement* (*Bo.El.*) *erster Ordnung* versteht man in der Theorie der B.T.s-Gruppen der Ebene einen Pfaffschen Ausdruck der Form

(223) $$\varsigma = \zeta(x, y, y')\, dx + v(x, y, y')\, dy',$$

zu dem noch die Pfaffsche Gleichung $dy - y'dx = 0$ hinzugedacht wird. Nehmen wir an, daß das Bo.El. (223) vermöge der allgemeinsten B.T. (14) aus dem Bo.El.

(224) $$\varsigma = \widehat{\zeta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\, d\mathfrak{x} + \widehat{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}'$$

entstanden sei, dann haben wir die Trf.s-Formeln

(225) $$\zeta = X_1\widehat{\zeta} + P_1\widehat{v},\ v = X_2\widehat{\zeta} + P_2\widehat{v}.$$

Wir können natürlich den Satz 4 *auch auf solche Relationensysteme der Form* (120) *anwenden, in welchen die Bestimmungsstücke* ζ, v *eines oder mehrerer Bo.El.e* (223) *und möglicherweise auch die Differentiale* dx, dy' *auftreten; nach* (225) *und*

(226) $$d\mathfrak{x} = X_1 dx + X_2 dy',\ d\mathfrak{y}' = P_1 dx + P_2 dy' \quad (dy - y'dx = 0)$$

ist dabei

(227) $$\zeta' = v,\ v' = \zeta;\ (dx)' = dy',\ (dy')' = dx.$$

---

[34]) W. Neumer, Die allgemeinsten Diffgl.n 4. und 5. O., welche durch B.T. in die Diffgl.n der Parabeln und der Kegelschnitte übergeführt werden können, dieses Journal **179** (1938), S. 193—203.

2. Friedrich Engel hat wesentliche Momente aus der Theorie der Bo.El.e $F(x, y, y')dx$ auf die allgemeinen Bo.El.e (223) übertragen[35]). Zunächst kann man das Integral

$$L = \int_{z_0)}^{z_1)} (\zeta dx + v dy') = \int_{z_0)}^{z_1)} \varsigma \tag{228}$$

längs einer Kurve — allgemeiner gesagt: einer Element-M_1 — $x(z)$, $y(z)$ erstrecken und es als die *Länge* des betreffenden Kurvenstückes bezüglich des Bo.El.s (223) bezeichnen. Folgerichtig nennen wir dann die ∞^2 Integralkurven der Diffgl. 2. O.

$$\varsigma = \zeta dx + v dy' = 0 \tag{229}$$

die *Minimalkurven des Bo.El.s* (223). Auch dem Begriff der *Extremalen eines Bo.El.s* (223) läßt sich folgendermaßen ein Sinn geben, welcher den Fall eines Bo.El.s ζdx in sich begreift.

Wir betten die Kurve $x(z)$, $y(z)$ in eine Schar unendlich benachbarter Kurven $x + \delta x$, $y + \delta y$, $y' + \delta y'$ ein, wobei wir der Variation δ die zwei Bedingungen vorschreiben, daß sie erstens eine inf. B.T. der Ebene x, y sei:

$$\delta x = U_2 \delta t, \ \delta y = (y' U_2 - U)\, \delta t, \ \delta y' = - U_1 \delta t, \tag{230}$$

und daß zweitens für $z = z_{i)}$ $(i = 0, 1)$ das Element $x + \delta x$, $y + \delta y$, $y' + \delta y'$ derselben Minimalen des Bo.El.s (223) angehöre wie das Element $x, y, y' = \frac{dy}{dz} \Big/ \frac{dx}{dz}$. Die zweite Bedingung lautet in Formeln

$$\zeta \delta x + v \delta y' = 0, \ \delta y - y' \delta x = 0 \text{ für } z = z_{i)} \qquad (i = 0, 1) \tag{231}$$

und läßt sich dahin aussprechen, daß die Einbettungskurven in ihren Endpunkten $z = z_{0)}, z_{1)}$ die beiden Minimalen berühren sollen, welche die Kurve $x(z)$, $y(z)$ in deren Endpunkten $z = z_{0)}, z_{1)}$ berühren.

Unter diesen Bedingungen bekommen wir für die Variation des Integrals (228) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{z_0)}^{z_1)} (\delta\zeta dx + \delta v dy') + \int_{z_0)}^{z_1)} (\zeta d\delta x + v d\delta y') \\ &= (\zeta \delta x + v \delta y')_{z_0)}^{z_1)} + \int_{z_0)}^{z_1)} (\delta\zeta dx - \delta x d\zeta + \delta v dy' - \delta y' dv), \end{aligned}$$

worin das Glied außerhalb des Integralzeichens wegen (231) verschwindet, so daß mit Rücksicht auf (230) und $dy(z) - y'(z)\, dx(z) = 0$ die Variation δL folgendermaßen umgestaltet werden kann:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta t \int_{z_0)}^{z_1)} (- U(\zeta_3 dx + v_3 dy') + (v_1 - \zeta_2)\, dU) \\ &= \delta t (U(v_1 - \zeta_2))_{z_0)}^{z_1)} - \delta t \int_{z_0)}^{z_1)} U(\zeta_3 dx + v_3 dy' + d(v_1 - \zeta_2)); \end{aligned}$$

da ferner nach (230) $U \delta t = y' \delta x - \delta y$, so ergibt sich schließlich wegen (231)

$$\delta L = - \delta t \int_{z_0)}^{z_1)} U((\zeta_{12} - 2\zeta_{21} + v_{11})\, dx + (2v_{12} - v_{21} - \zeta_{22})\, dy'). \tag{232}$$

---

[35]) In den beiden, im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung **19** (1910) erschienenen Abhandlungen:

1. F. Engel, Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdrucke kovariant sind, S. 112—120.

2. Derselbe, Eine Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation, S. 306—317.

Also gilt[36]):

Satz 6. *Die Extremalen des Bo.El.s* (223), *also die Kurven, längs derer das Integral* (228) *ein Extremum wird, sind die Lösungen der Diffgl. 2. O.*

$$(233)\qquad \boxed{(2v_{12} - v_{21} - \zeta_{22})\,dy' + (\zeta_{12} - 2\zeta_{21} + v_{11})\,dx \equiv \bar{v}dy' + \bar{\zeta}dx = 0.}$$

Die Extremalen werden nur dann unbestimmt, wenn das Bo.El. (223) ein vollständiges Differential ist. *Wenn die Diffgl. der Extremalen mit der Diffgl. der Minimalen gleichwertig ist oder wenn die Extremalen unbestimmt sind, wenn also*

$$(234)\qquad \boxed{\zeta(2v_{12} - v_{21} - \zeta_{22}) + v(2\zeta_{21} - \zeta_{12} - v_{11}) \equiv \zeta\bar{v} - v\bar{\zeta} = 0}$$

wird, dann nennen wir das Bo.El. (223) *ausgeartet.* Diese Definition deckt sich bei quadratischen Bo.El.n $\sqrt{E(x,y) + 2F(x,y)\,y' + G(x,y)\,y'^2}\,dx$ mit der gewohnten, daß $EG - F^2 = 0$ sein solle. Jedes ausgeartete Bo.El. (223) — für welches also die Bedingung (234) erfüllt ist — kann durch B.T. die Form $(g(x,y) + h(x,y)\,y')\,dx$ erhalten. Denn ein Bo.El. (223) kann immer in die Form ζdx gebracht werden, für welche die Bedingung (234) $\zeta_{22} = 0$ wird, d. h. die angegebene Form liefert. Wenn das ausgeartete Bo.El. $(g + hy')\,dx$ kein vollständiges Differential ist, kann es durch P.T. auch noch in das Bo.El. $(xy' - y)dx$ verwandelt werden.

3. Im Hinblick auf spätere Anwendung schalten wir noch folgende Erörterung ein. Unter dem Begriff *Berührungsbogen zweier Kurven* wollen wir ein Kurvenstück verstehen, dessen Endelemente je einer der beiden Kurven angehören. Ferner wollen wir die Minimalen des Bo.El.s (223) mit $\mathfrak{C}_{\underset{v}{\zeta}}$ bezeichnen (als die Lösungen der Diffgl. (229) oder $y'' + \frac{\zeta}{v} = 0$. Das Bo.El. (223) selber haben wir auf Grund der Definition des Integrals (228) als die *Länge* des unendlich kleinen Kurvenstückes anzusehen, welches aus den beiden vereinigt liegenden Elementen

$$(235)\qquad E_1(x, y, y'),\ E_2(x + dx,\ y + y'dx,\ y' + dy')$$

besteht. Wir denken uns nun die Minimalen $\mathfrak{C}'_{\underset{v}{\zeta}}$, $\mathfrak{C}''_{\underset{v}{\zeta}}$ durch die beiden Elemente (235) gelegt (innerhalb eines genügend beschränkten Bereiches der Variablen x, y, y' läuft durch ein Element x, y, y' nur eine Kurve $\mathfrak{C}_{\underset{v}{\zeta}}$) und fragen nach sämtlichen unendlich kleinen Berührungsbögen dieser beiden Minimalen, welche aus zwei vereinigt liegenden Elementen

$$(236)\qquad E'(x + r'dx,\ y + s'y'dx,\ y' + t'dy'),\ E''(x + r''dx,\ y + s''y'dx,\ y' + t''dy')$$

bestehen (so daß also das Element $E^{(i)}$ der Kurve $\mathfrak{C}^{(i)}_{\underset{v}{\zeta}}$ angehört $(i = 1, 2)$). Die Elemente E_i und $E^{(i)}$ liegen natürlich ebenfalls vereinigt. Wir finden für die Elemente (236) die folgenden, stets erfüllbaren Bedingungen

$$(237)\quad \text{(a) } s' = r',\ s'' = r''\quad \text{(b) } \zeta r'dx + vt'dy' = 0,\ \zeta(r'' - 1)dx + v(t'' - 1)\,dy' = 0.$$

(237 b) besagt, daß

$$(238)\qquad \zeta(r'' - r')dx + v(t'' - t')dy' = \zeta dx + vdy'.$$

Die Relation (238) aber läßt sich in den Satz fassen:

Satz 7. *Die Länge eines jeden unendlich kleinen Berührungsbogens* (236) *der Minimalen* $\mathfrak{C}'_{\underset{v}{\zeta}}$, $\mathfrak{C}''_{\underset{v}{\zeta}}$ *durch die Elemente* (235) *ist gleich der Länge des unendlich kleinen Bogens* (235).

[36]) Vgl. a. a. O. [35]), 1. Abhandlung (22).

Ist $\bar\zeta dx + \bar v dy' = 0$ eine von $\zeta dx + v dy' = 0$ verschiedene Diffgl. 2. O., dann kann außer den Forderungen (237) auch noch die Forderung

$$\bar\zeta(r'' - r')dx + \bar v(t'' - t')dy' = 0 \tag{239}$$

befriedigt werden, da die Gleichungen (237 b), (239) offenbar stets nach drei von den Größen r', r'', t', t'' auflösbar sind. Hiernach gilt:

Satz 8. *Es gibt in jedem Fall eine Minimale* $\mathfrak{C}_{\bar\zeta}^{\bar v}$ *des Bo.El.s* $\bar\zeta dx + \bar v dy'$ $(\zeta\bar v - v\bar\zeta \neq 0)$, *welche einen unendlich kleinen Berührungsbogen* (236), (237) *enthält; dieser berührt die beiden Minimalen* $\mathfrak{C}_{\bar\zeta}^{\bar v}$, $\mathfrak{C}_{\bar\zeta'}^{\bar v}$, *welche durch die Elemente* (235) *bestimmt sind.*

§ 19. Die invarianten Bogenelemente $\zeta dx + v dy'$ der Gruppen G_3^2.

1. Wir beweisen jetzt

Satz 9. *Eine* G_3^2 *mit der Basis* $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ *bzw.* $(\alpha, \infty, \sigma, \tau)$ *läßt* ∞^2 *oder, von konstanten Faktoren abgesehen,* ∞^1 *Bo.El.e* (223) *inv., welche durch die Formeln*

$$\boxed{\mathfrak{s} = a\mathfrak{s}_0 + b\mathfrak{s}_0^*} \tag{a}$$

$$\boxed{\mathfrak{s}_0 = e^\tau(\beta dx + dy'),\ \mathfrak{s}_0^* = e^\sigma(\alpha dx + dy')} \tag{240 (b)}$$

bzw.

$$\mathfrak{s}_0 = e^\tau dx,\ \mathfrak{s}_0^* = e^\sigma(\alpha dx + dy') \tag{c}$$

dargestellt werden.

Die Invarianzbedingung des Bo.El.s (223) gegenüber der inf. B.T. M lautet (man beachte, daß $dy - y'dx = 0$):

$$\begin{aligned}(241)\qquad &(\zeta M_{21} - vM_{11} - \zeta_2 M_1 + \zeta_1 M_2 - \zeta_3 M)dx \\ &+ (\zeta M_{22} - vM_{12} + v_1 M_2 - v_2 M_1 - v_3 M)dy' = 0.\end{aligned}$$

Soll nun (241) eine Folge von (55) sein, dann muß $\zeta = \text{const. } e^\tau$, $v = \text{const. } e^\sigma$ werden, d. h. es bleiben die ∞^2 Bo.El.e

$$(242)\qquad \text{(a) } \mathfrak{s} = a\mathfrak{s}_0 + b\mathfrak{s}_0^* \qquad \text{(b) } \mathfrak{s}_0 = e^\tau dx,\ \mathfrak{s}_0^* = e^\sigma dy'$$

gegenüber der G_3^2 (55) inv. Wir denken uns die Bo.El.e (242 b) in der dem System (81) entsprechenden Form

$$\mathfrak{s}_0 = e^t d\mathfrak{x},\ \mathfrak{s}_0^* = e^s d\mathfrak{y}' \tag{243}$$

geschrieben und unterwerfen sie der B. T. (14). Auf Grund von (225), (85′) finden wir

$$(244)\qquad \mathfrak{s}_0 = e^t d\mathfrak{x} = e^\tau(\beta dx + dy'),\ \mathfrak{s}_0^* = e^s d\mathfrak{y}' = e^\sigma(\alpha dx + dy')$$

und somit in der Tat die Form (240 a, b) für das allgemeine inv.e Bo.El. der G_3^2 (85). Üben wir eine spezielle B.T. (14), (133) aus (d. h. die allgemeinste P.T.), dann bekommen wir mit Rücksicht auf (134) und (225) die Formeln (240 a, c) für das allgemeine inv.e Bo.El. der G_3^2 (125). Indessen können wir (240 c) auch aus (240 b) durch den Grenzübergang $\beta = \beta_0 \to \infty$ erhalten.

Die beiden Bo.El.e (240 b) bzw. (240 c) sollen die *Haupt-Bo.El.e* der Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ bzw. $(\alpha, \infty, \sigma, \tau)$ heißen.

Die ∞^1 Minimalendiffgl.n der Bo.El.e (240 a, b) fallen offenbar mit den ∞^1 durch (151) bestimmten inv.n Diffgl.n $y'' + \varepsilon = 0$ zusammen. Daraus folgt, daß die Haupt-Bo.El.e (240 b) — bis auf etwaige konstante Faktoren — (α, β)-dualistisch sind in bezug auf automorphe (α, β)-dualistische Trf.n einer G_3^2 (85). Diejenigen Bo.El.e (240), deren Minimalendiffgl.n *singulär* sind (§ 9), nennen wir ebenfalls singulär.

Es bedarf keiner Erläuterungen, daß folgender Satz gilt:

Satz 10. *Der Quotient zweier Bo.El.e* (240 a, b) *bzw.* (240 a, c):

$$(245)\quad \frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{s}_2} = \frac{a_{1)}I^{(2)} + b_{1)}}{a_{2)}I^{(2)} + b_{2)}};\quad I^{(2)} = \frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_0^*};\quad \frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_0^*} = e^{\tau-\sigma}\frac{y'' + \beta}{y'' + \alpha}\ \textit{bzw.}\ \frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_0^*} = e^{\tau-\sigma}\frac{1}{y'' + \alpha}$$

ist eine Diffinv.e 2. O. der G_3^2 (85) *bzw.* (125).

2. Die Extremalendiffgl. (233) wird für das Bo.El. (242) der G_3^2 (55):

$$(246)\qquad (b\Gamma e^{\sigma} - a\mathsf{B}e^{\tau})dy' + (b\mathsf{A}e^{\sigma} - a\Gamma e^{\tau})dx = 0$$

oder, wenn wir (246) durch $e^{\sigma+\tau}$ dividieren und (73) beachten:

$$(247)\qquad \boxed{(b\mathsf{A}_{0)} - a\Gamma_{0)})\mathfrak{s}_0 + (b\Gamma_{0)} - a\mathsf{B}_{0)})\mathfrak{s}_0^* = 0.}$$

(247) stellt aber wegen (244) und (95′) ganz allgemein die Extremalendiffgl. des Bo.El.s (240 a) dar, wenn unter $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_0^*$ die Bo.El.e (240 b) bzw. (240 c) verstanden werden. Die Diffgl. (247) kann sich von der für $\zeta = a\beta e^{\tau} + b\alpha e^{\sigma}$, $v = ae^{\tau} + be^{\sigma}$ gebildeten Diffgl. (233) nur um einen *nicht verschwindenden* Faktor unterscheiden.

Nach Definition ist das Bo. El. (240) dann und nur dann ausgeartet, wenn die Minimalendiffgl.

$$(248)\qquad \boxed{a\mathfrak{s}_0 + b\mathfrak{s}_0^* = 0}$$

mit der Extremalendiffgl. (247) zusammenfällt oder letztere sich auf $0 = 0$ reduziert, d. h. wenn

$$(249)\qquad \boxed{B_{0)}a^2 - 2\Gamma_{0)}ab + \mathsf{A}_{0)}b^2 = 0.}$$

Wegen (95) sind die aus (249) bestimmten Werte $a : b$ dieselben wie die aus (152), (151) bestimmten, d. h.

Satz 11. *Die ausgearteten inv.n Bo.El.e 1. O. einer* G_3^2 *fallen mit den singulären zusammen.*

Die Diffgl. (247) ist die Minimalendiffgl. des Bo.El.s

$$(250)\qquad \boxed{\text{(a)}\ \mathfrak{s}^* = a^*\mathfrak{s}_0 + b^*\mathfrak{s}_0^* \qquad \text{(b)}\ a^* = -\Gamma_{0)}a + \mathsf{A}_{0)}b,\ b^* = -\mathsf{B}_{0)}a + \Gamma_{0)}b.}$$

Die Extremalendiffgl. dieses Bo.El.s wird, wenn a^*, b^* an Stelle von a, b in (247) eingesetzt werden:

$$(251)\qquad (\mathsf{A}_{0)}\mathsf{B}_{0)} - \Gamma_{0)}^2)(a\mathfrak{s}_0 + b\mathfrak{s}_0^*) = 0.$$

Zwei Bo.El.e (240 a) und (250 a), welche zueinander in der Beziehung (250 b) stehen, bei welchen also die Extremalen des ersten die Minimalen des zweiten sind, wollen wir *kovariant* (in bezug auf ihre G_3^2) nennen. Bei den Gruppen $\tilde{\mathcal{G}}_3$, wo $\mathsf{A}_{0)}\,\mathsf{B}_{0)} - \Gamma_{0)}^2 \neq 0$, sind, wie Gleichung (251) zeigt, von zwei kovarianten Bo.El.n auch umgekehrt die Extremalen des zweiten die Minimalen des ersten, d. h. die beiden Bo.El.e sind *wechselseitig kovariant*. Bei allen anderen Typen von G_3^2 hingegen muß wegen $\mathsf{A}_{0)}\,\mathsf{B}_{0)} - \Gamma_{0)}^2 = 0$ nach (251) von zwei kovarianten Bo.El.n das zweite ausgeartet und zwar ein vollständiges Differential sein; die Bo.El.e sind dann also nur *einseitig* kovariant.

Überhaupt sind die ausgearteten Bo.El.e aller G_3^2, ausgenommen die $\tilde{\mathcal{G}}_3$, stets vollständige Differentiale. Das lehren die Identitäten

$$\begin{aligned}
&-\mathsf{B}_{0)}a + \Gamma_{0)}b = \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}(-\sqrt{\mathsf{B}_{0)}}a + \sqrt{\mathsf{A}_{0)}}b) - (\sqrt{\mathsf{A}_{0)}}\sqrt{\mathsf{B}_{0)}} - \Gamma_{0)})b,\\
(252)\qquad &\mathsf{A}_{0)}b - \Gamma_{0)}a = \sqrt{\mathsf{A}_{0)}}(\sqrt{\mathsf{A}_{0)}}b - \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}a) + (\sqrt{\mathsf{A}_{0)}}\sqrt{\mathsf{B}_{0)}} - \Gamma_{0)})a,\\
&(\sqrt{\mathsf{B}_{0)}}a - \sqrt{\mathsf{A}_{0)}}b)^2 = \mathsf{B}_{0)}a^2 - 2\Gamma_{0)}ab + \mathsf{A}_{0)}b^2 - 2(\sqrt{\mathsf{A}_{0)}}\sqrt{\mathsf{B}_{0)}} - \Gamma_{0)})ab.
\end{aligned}$$

Setzen wir in (240 a) und (250) $a = 1, b = 0$ bzw. $a = 0, b = 1$, dann erhalten wir die Haupt-Bo.El.e $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_0^*$ und die Bo.El.e

$$(253) \qquad -\Gamma_{0)}\mathfrak{s}_0 - \mathsf{B}_{0)}\mathfrak{s}_0^*,\ \mathsf{A}_{0)}\mathfrak{s}_0 + \Gamma_{0)}\mathfrak{s}_0^*$$

als die zu ihnen kovarianten. Definiert das System (85) eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3(\check{\alpha}, \check{\beta})$ $(\check{\alpha}, \check{\beta} \neq \alpha, \beta)$, dann sind wegen $\Gamma_{0)} = 0$ die Bo.El.e (253) bis auf die nicht verschwindenden konstanten Faktoren $-\mathsf{B}_{0)}, \mathsf{A}_{0)}$ wieder die — nicht ausgearteten! — Haupt-Bo.El.e in umgekehrter Reihenfolge. Von konstanten Faktoren abgesehen sind daher bei einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ die nicht ausgearteten Bo-El.e paarweise wechselseitig kovariant und zwar als die Haupt-Bo.El.e der ∞^1 nicht ausgezeichneten Basen. Die ausgearteten Bo.El.e einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$, d. h. die Haupt-Bo.El.e der ausgezeichneten Basis $(\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\sigma}, \check{\tau})$ sind zu sich selbst kovariant.

Bei den $\mathcal{G}_3^c(c \neq \infty)$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ ist von zwei kovarianten Bo.El.n das zweite immer das ausgeartete; nach (180 II, III, V) sind daher die kovarianten Bo.El.e der Gruppen $\mathcal{G}_3^c(c \neq \infty, \frac{5}{4})$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ bzw. $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}$ die Haupt-Bo.El.e der ∞^1 Basen bzw. der ∞^1 ausgezeichneten Basen.

Kovariante Bo.El.e einer G_3^2 besitzen also stets zueinander polare Minimalendiffgl.n.

Da die Gruppen $\mathcal{G}_3^\infty$ und $\overline{\mathcal{G}}_3$ nur ausgeartete Bo.El.e inv. lassen, gibt es bei diesen keine kovarianten Bo.El.e.

Zusammenfassend können wir das Theorem aufstellen:

Theorem 5. *Bei einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ sind die Haupt-Bo.El.e jeder nicht ausgezeichneten Basis und nur diese wechselseitig kovariant, d. h. die Minimalen des einen sind die Extremalen des anderen. Für die beiden ausgearteten Bo.El.e einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ sind die Minimalen zugleich die Extremalen.*

Bei den $\mathcal{G}_3^c(c \neq \infty, \frac{5}{4})$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ bzw. $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}$ sind die Haupt-Bo.El.e der ∞^1 Basen bzw. der ∞^1 ausgezeichneten Basen — von welchen das zweite stets ausgeartet ist — und nur diese kovariant. Die ausgearteten inv.n Bo.El.e der $\mathcal{G}_3^c, \widehat{\mathcal{G}}_3, \overline{\mathcal{G}}_3$ sind vollständige Differentiale.

§ 20. Die verschiedenen Basen einer G_3^2, ausgedrückt durch eine gegebene Basis.

1. Der Begriff der kovarianten inv.n Bo.El.e einer G_3^2 ermöglicht es, auf bequeme Weise sämtliche Basen $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ der G_3^2 durch eine gegebene Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ auszudrücken. Zu dem Zweck wollen wir die Paare von Bo.El.n

$$(254) \qquad \mathfrak{s} = a\mathfrak{s}_0 + b\mathfrak{s}_0^*,\ \mathfrak{s}^* = a^*\mathfrak{s}_0 + b^*\mathfrak{s}_0^*$$

aufsuchen, deren Minimalendiffgl.n polar sind. Der Kürze halber sollen dann auch die Bo.El.e (254) polar heißen. Wir haben jeden Typus von G_3^2 für sich zu behandeln.

Betrachten wir zunächst die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$. Sind die Haupt-Bo.El.e $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_0^*$ nicht ausgeartet, dann ist $\Gamma = 0$, und nach Theorem 5 sowie wegen (250) ist für nicht ausgeartete Bo.El.e (254) zu fordern, daß

$$(255) \qquad \boxed{a^* : b^* = \mathsf{A}_{0)}b : -\mathsf{B}_{0)}a.}$$

Sind die Bo.El.e (254) ausgeartet und bezeichnen wir sie in diesem Falle mit $\check{\mathfrak{s}}$, $\check{\mathfrak{s}}^*$, dann muß nach (249)

$$(256) \qquad \boxed{\check{a} : \check{b} = \sqrt{-\mathsf{A}_{0)}} : \sqrt{\mathsf{B}_{0)}},\ \check{a}^* : \check{b}^* = -\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}} : \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}}$$

sein. Drücken wir umgekehrt mittels (256) die Haupt-Bo.El.e $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_0^*$ durch $\check{\mathfrak{s}}$, $\check{\mathfrak{s}}^*$ aus, so kommt

$$(257)\qquad \mathsf{s}_0 = \frac{\sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\;\check{b}^*\check{\mathsf{s}} - \check{b}\check{\mathsf{s}}^*}{\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\;\;2\check{b}\check{b}^*},\quad \mathsf{s}_0^* = \frac{\check{b}^*\check{\mathsf{s}} + \check{b}\check{\mathsf{s}}^*}{2\check{b}\check{b}^*}.$$

Da nun unter s_0, s_0^* alle polaren Paare nicht ausgearteter Bo.El.e der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ verstanden werden dürfen, so lehren die Formeln (257), daß, unter $\check{\mathsf{s}}$, $\check{\mathsf{s}}^*$ die Haupt-Bo.El.e der ausgezeichneten Basis $(\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\sigma}, \check{\tau})$ verstanden, zwei nicht ausgeartete inv.e Bo.El.e

$$(258)\qquad \mathsf{s} = a\check{\mathsf{s}} + b\check{\mathsf{s}}^*,\quad \mathsf{s}^* = a^*\check{\mathsf{s}} + b^*\check{\mathsf{s}}^*$$

dann und nur dann polar sind, wenn

$$(259)\qquad \boxed{a^* : b^* = -a : b\;\;(ab\,a^*b^* \neq 0).}$$

Die Polarität der Bo.El.e (258), (259) kann man auch direkt erkennen, wenn man in den Formeln (240 a) und (250), welche polare Bo.El.e darstellen, die Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ ausgezeichnet sein läßt, so daß $\mathsf{A}_{0)} = \mathsf{B}_{0)} = 0$, $\Gamma_{0)} \neq 0$.

Zwei polare inv.e Bo.El.e einer G_3^2 bestimmen immer eine Basis $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ der G_3^2, als deren Haupt-Bo.El.e sie angesehen werden können. Mithin bekommen wir auf Grund der Beziehung (255) bzw. (256) folgende Ausdrücke für die ∞^1 nicht ausgezeichneten Basen $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ bzw. für die eine ausgezeichnete Basis $(\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\sigma}, \check{\tau})$ der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$, von welcher die nicht ausgezeichnete Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ gegeben ist:

$$(260)\qquad \boxed{\begin{aligned} &e^{\tilde{\tau}} = ae^{\tau} + be^{\sigma},\;\; e^{\tilde{\sigma}} = \mathsf{A}_{0)}be^{\tau} - \mathsf{B}_{0)}ae^{\sigma};\\ &\tilde{\beta} = \frac{a\beta e^{\tau} + b\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\tau}}},\;\; \tilde{\alpha} = \frac{\mathsf{A}_{0)}b\beta e^{\tau} - \mathsf{B}_{0)}a\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\sigma}}}. \end{aligned}}$$

$$(261)\qquad \boxed{\begin{aligned} &e^{\check{\tau}} = \sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}e^{\tau} + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}e^{\sigma},\;\; e^{\check{\sigma}} = -\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}e^{\tau} + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}e^{\sigma};\\ &\check{\beta} = \frac{\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\beta e^{\tau} + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\alpha e^{\sigma}}{e^{\check{\tau}}},\;\; \check{\alpha} = \frac{-\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\beta e^{\tau} + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\alpha e^{\sigma}}{e^{\check{\sigma}}}. \end{aligned}}$$

Ist dagegen die ausgezeichnete Basis $(\check{\alpha}, \check{\beta}, \check{\sigma}, \check{\tau})$ selber gegeben, dann werden die übrigen Basen auf Grund von (259) durch die folgenden Formeln dargestellt:

$$(262)\qquad \boxed{\begin{aligned} &e^{\tau} = ae^{\check{\tau}} + be^{\check{\sigma}},\;\; e^{\sigma} = -ae^{\check{\tau}} + be^{\check{\sigma}};\\ &\beta = \frac{a\check{\beta}e^{\check{\tau}} + b\check{\alpha}e^{\check{\sigma}}}{e^{\tau}},\;\; \alpha = \frac{-a\check{\beta}e^{\check{\tau}} + b\check{\alpha}e^{\check{\sigma}}}{e^{\sigma}}. \end{aligned}}$$

Wenn β bzw. $\check{\beta} = \infty$, dann treten an die Stelle der Formeln (260), (261) bzw. (262) die folgenden (man nehme den Grenzübergang $\beta = \beta_{0)} \to \infty$ unter Beachtung der Festsetzung (126) vor oder benütze die Ausdrücke (240 c) für die Haupt-Bo.El.e in (254) und (258)):

$$(263)\qquad \begin{cases} e^{\tilde{\tau}} = be^{\sigma},\; e^{\tilde{\sigma}} = -\mathsf{B}_{0)}ae^{\sigma},\;\text{d. h.}\;\; \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + \text{const.} = \sigma + \text{const.};\\ \widetilde{\beta} = \dfrac{ae^{\tau} + b\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\tau}}},\;\; \widetilde{\alpha} = \dfrac{\mathsf{A}_{0)}be^{\tau} - \mathsf{B}_{0)}a\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\sigma}}}; \end{cases}$$

$$(264)\qquad \begin{cases} e^{\check{\tau}} = \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}e^{\sigma},\;\; e^{\check{\sigma}} = \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}e^{\sigma},\;\text{d. h.}\;\; \check{\tau} = \check{\sigma} = \sigma + \text{const.};\\ \check{\beta} = \dfrac{\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}e^{\tau} + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\alpha e^{\sigma}}{e^{\check{\tau}}},\;\; \check{\alpha} = \dfrac{-\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}e^{\tau} + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\alpha e^{\sigma}}{e^{\check{\sigma}}}. \end{cases}$$

$$(265)\qquad \begin{cases} e^{\tau} = be^{\check{\sigma}},\;\; e^{\sigma} = be^{\check{\sigma}},\;\text{d. h.}\;\; \tau = \sigma = \check{\sigma} + \text{const.};\\ \beta = \dfrac{ae^{\check{\tau}} + b\check{\alpha}e^{\check{\sigma}}}{e^{\tau}},\;\; \alpha = \dfrac{-ae^{\check{\tau}} + b\check{\alpha}e^{\check{\sigma}}}{e^{\sigma}}. \end{cases}$$

Ist die durch die Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ bzw. $(\breve{\alpha}, \breve{\beta}, \breve{\sigma}, \breve{\tau})$ gegebene $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ eine P.T.s-Gruppe, dann muß unter den durch (260) oder (261) bzw. (262) repräsentierten Basen eine Basis $(\tilde{\alpha}_\alpha, \infty, \tilde{\sigma}_\alpha, \tilde{\tau}_\infty)$ oder $(\breve{\alpha}_\alpha, \infty, \breve{\sigma}_\alpha, \breve{\tau}_\infty)$ bzw. $(\alpha_\alpha, \infty, \sigma_\alpha, \tau_\infty)$ vorkommen. Beachtet man, daß deren Haupt-Bo.El.e die Gestalt (240 c) haben, dann bekommt man als Ergänzung zu den Formeln (260)—(262):

$$(266)\qquad \begin{cases} a_\alpha e^\tau + b_\alpha e^\sigma = 0;\ e^{\tilde{\tau}_\alpha} = a_\alpha \beta e^\tau + b_\alpha \alpha e^\sigma, \\ e^{\tilde{\sigma}_\alpha} = \mathsf{A}_{0)} b_\alpha e^\tau - \mathsf{B}_{0)} a_\alpha e^\sigma;\ \tilde{\alpha}_\alpha = \dfrac{\mathsf{A}_{0)} b_\alpha \beta e^\tau - \mathsf{B}_{0)} a_\alpha \alpha e^\sigma}{e^{\tilde{\sigma}_\alpha}}; \end{cases}$$

$$(267)\qquad \begin{cases} \sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\, e^\tau + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\, e^\sigma = 0;\ e^{\breve{\tau}_\alpha} = \sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\, \beta e^\tau + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\, \alpha e^\sigma, \\ e^{\breve{\sigma}_\alpha} = -\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\, e^\tau + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\, e^\sigma;\ \breve{\alpha}_\infty = \dfrac{-\sqrt{-\mathsf{A}_{0)}}\, \beta e^\tau + \sqrt{\mathsf{B}_{0)}}\, \alpha e^\sigma}{e^{\breve{\sigma}_\alpha}}. \end{cases}$$

$$(268)\qquad \begin{cases} a_\alpha e^{\breve{\tau}} + b_\alpha e^{\breve{\sigma}} = 0;\ e^{\tau_\alpha} = a_\alpha \breve{\beta} e^{\breve{\tau}} + b_\alpha \breve{\alpha} e^{\breve{\sigma}}, \\ e^{\sigma_\alpha} = -a_\alpha e^{\breve{\tau}} + b_\alpha e^{\breve{\sigma}};\ \alpha_\infty = \dfrac{-a_\alpha \breve{\beta} e^{\breve{\tau}} + b_\alpha \breve{\alpha} e^{\breve{\sigma}}}{e^{\sigma_\alpha}}. \end{cases}$$

2. Bei den übrigen Typen von G_3^2 liegen einfachere Verhältnisse vor. Bezüglich der $\mathcal{G}_3^c(c \neq \infty, \frac{5}{4})$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$ gilt, daß sämtliche Paare von Bo.El.n

$$(269)\qquad \mathfrak{s} = a\mathfrak{s}_0 + b\breve{\mathfrak{s}},\ \mathfrak{s}^* = b^*\breve{\mathfrak{s}}$$

und sonst keine polar sind, unter $\breve{\mathfrak{s}}$ das ausgeartete inv.e Bo.El. verstanden. Ist also $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ die Basis der Haupt-Bo.El.e $\mathfrak{s}, \breve{\mathfrak{s}}$, dann drücken sich alle übrigen Basen $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ der $\mathcal{G}_3^c(\alpha)(c \neq \infty, \frac{5}{4})$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3(\alpha)$ folgendermaßen aus:

$$(270)\qquad \boxed{e^{\tilde{\tau}} = ae^\tau + be^\sigma,\ e^{\tilde{\sigma}} = b^* e^\sigma;\ \tilde{\beta} = \frac{\alpha\beta e^\tau + b\alpha e^\sigma}{e^{\tilde{\tau}}},\ \tilde{\alpha} = \alpha.}$$

Wenn eine $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}(\alpha)$ vorliegt, dann werden durch (270) lediglich die ∞^1 ausgezeichneten Basen dargestellt, und zwar durch eine bestimmte von ihnen. Aber darüber hinaus sind ja sämtliche Paare inv.r Bo.El.e

$$(271)\qquad \mathfrak{s} = a\mathfrak{s}_0 + b\breve{\mathfrak{s}},\ \mathfrak{s}^* = a^*\mathfrak{s}_0 + b^*\breve{\mathfrak{s}} \quad (ab^* - ba^* \neq 0)$$

einer $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}(\alpha)$ polar, d. h. durch die Formeln

$$(272)\qquad \boxed{\begin{array}{l} e^{\tilde{\tau}} = ae^\tau + be^\sigma,\ e^{\tilde{\sigma}} = a^* e^\tau + b^* e^\sigma\ (ab^* - ba^* \neq 0); \\ \tilde{\beta} = \dfrac{a\beta e^\tau + b\alpha e^\sigma}{e^{\tilde{\tau}}},\ \tilde{\alpha} = \dfrac{a^*\beta e^\tau + b^*\alpha e^\sigma}{e^{\tilde{\sigma}}} \end{array}}$$

werden immer Basen dieser Gruppe dargestellt. Das gilt übrigens auch dann, wenn die Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ in (272) keine ausgezeichnete ist. Unter letzterer Voraussetzung ist (272) eine ausgezeichnete Basis, wenn (s. (185 d), (96) und (249)) die erste oder die zweite der folgenden Gleichungen

$$(273)\qquad \boxed{\text{(a)}\ \psi_{0)} a^* - \chi_{0)} b^* = 0 \qquad \text{(a*)}\ \psi_{0)} a - \chi_{0)} b = 0}$$

erfüllt ist. Bei den $\mathcal{G}_3^\infty$ sind alle inv.n Bo.El.e ausgeartet, so daß für jede beliebige Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ in den Formeln (272) sämtliche anderen Basen enthalten sind. Die ausgezeichneten Basen werden etwa wieder geliefert durch die Bedingungen (273) (s. (183_2), (95)).

Durch (272) sind endlich auch alle Basen einer $\bar{\mathcal{G}}_3$ gegeben, unter $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ eine ganz beliebige Basis verstanden; denn bei den $\bar{\mathcal{G}}_3$ ist ja keine Basis irgendwie ausgezeichnet.

In den Formeln (272) sind die Formeln (270) als der Spezialfall $a^* = 0$ enthalten.

Im Grenzfalle $\beta = \infty$ modifizieren sich die Formeln (272) bei Benutzung von (240 c) zu

$$(274) \qquad \begin{cases} e^{\tilde{\tau}} = be^{\sigma},\ e^{\tilde{\sigma}} = b^*e^{\sigma},\ \text{d. h. } \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + \text{const.} = \sigma + \text{const.}; \\ \tilde{\beta} = \dfrac{ae^{\tau} + b\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\tau}}},\ \tilde{\alpha} = \dfrac{a^*e^{\tau} + b^*\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\sigma}}}. \end{cases}$$

Für $a^* = 0$ erhält man aus (274) den Grenzfall $\beta = \infty$ bezüglich der Formeln (270).

Liegt eine P.T.s-Gruppe $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}, \mathcal{G}_3^{\infty}$ oder $\bar{\mathcal{G}}_3$ vor, welche durch die Basis $(\alpha, \infty, \sigma, \tau)$ gegeben ist, dann finden wir für die ∞^1 Basen $(\tilde{\alpha}, \infty, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ die Darstellung

$$(275) \qquad e^{\tilde{\tau}} = ae^{\tau},\ e^{\tilde{\sigma}} = b^*e^{\sigma};\ \tilde{\beta} = \infty,\ \tilde{\alpha} = \frac{a^*e^{\tau} + b^*\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\sigma}}}.$$

Wenn in (270) $\alpha = \infty$, dann sind

$$(276) \qquad \mathfrak{s}_0 = e^{\tau}(\beta dx + dy'),\ \check{\mathfrak{s}} = e^{\sigma}dx$$

die Haupt-Bo.El.e der Basis $(\infty, \beta, \sigma, \tau)$, so daß wir aus (269) für die übrigen Basen die folgenden Ausdrücke

$$(277) \qquad e^{\tilde{\tau}} = ae^{\tau},\ e^{\tilde{\sigma}} = b^*e^{\sigma};\ \tilde{\beta} = \frac{a\beta e^{\tau} + be^{\sigma}}{e^{\tilde{\tau}}},\ \tilde{\alpha} = \infty$$

bekommen.

Die Formeln (277) repräsentieren auch die ∞^1 Basen $(\infty, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ einer $\mathcal{G}_3^{\frac{5}{4}}, \mathcal{G}_3^{\infty}$ oder $\bar{\mathcal{G}}_3$, welche durch eine Basis $(\infty, \beta, \sigma, \tau)$ bestimmt ist; sie unterscheiden sich von (275) durch die Substitution

$$(278) \qquad (\alpha\beta)(\sigma\tau)(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(\tilde{\sigma}\tilde{\tau})(ab^*)(ba^*).$$

Ist schließlich irgendeine P.T.s-Gruppe $\mathcal{G}_3^c, \hat{\mathcal{G}}_3, \bar{\mathcal{G}}_3$ durch eine Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ gegeben, dann werden die Basen $(\tilde{\alpha}, \infty, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ geliefert durch

$$(279) \qquad \begin{cases} a_{\infty}e^{\tau} + b_{\infty}e^{\sigma} = 0;\ e^{\tilde{\tau}} = a_{\infty}\beta e^{\tau} + b_{\infty}\alpha e^{\sigma}, \\ e^{\tilde{\sigma}} = a^*e^{\tau} + b^*e^{\sigma};\ \tilde{\alpha} = \dfrac{a^*\beta e^{\tau} + b^*\alpha e^{\sigma}}{e^{\tilde{\sigma}}}. \end{cases}$$

In sämtlichen in dieser Ziffer angeführten Grenzfällen bleiben die Gleichungen (273) in ihrer Bedeutung unverändert.

§ 21. Die von einem nicht ausgearteten invarianten Bogenelement $\zeta dx + v dy'$ einer G_3^2 induzierte Metrik.

1. Ein nicht ausgeartetes inv.s Bo.El. $\mathfrak{s}_0$ einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ induziert eine Metrik, welche die Verallgemeinerung der nichteuklidischen Kegelschnittsmetrik vom Standpunkt der B.T.n aus darstellt. Sei $\mathfrak{s}_0^*$ das zu $\mathfrak{s}_0$ polare Bo.El. und $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ die Basis, deren Haupt-Bo.El.e $\mathfrak{s}_0$ und $\mathfrak{s}_0^*$ sind, so daß also beide die Gestalt (240 b) besitzen. Dann wollen wir die über einen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ erstreckten Integrale $\int_{\mathfrak{C}} \mathfrak{s}_0$, $\int_{\mathfrak{C}} \mathfrak{s}_0^*$ dessen β- bzw. α-*Länge* nennen; die Kurven $\mathfrak{C}_\beta, \mathfrak{C}_\alpha$ sind dann die Linien von der β- bzw. α-Länge Null. Ferner wollen wir von der β- bzw. α-*Distanz* zweier Kurven $(\mu_1), (\mu_2)$ bzw. $(\lambda_1), (\lambda_2)$ sprechen, indem wir darunter die β- bzw. α-Länge des Berührungsbogens (vgl. § 18, 3)

verstehen, welchen die Kurven $(\mu_{1)})$, $(\mu_{2)})$ bzw. $(\lambda_{1)})$, $(\lambda_{2)})$ auf der sie berührenden $\mathfrak{C}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{C}_\beta$ abgrenzen [37]). Nach Theorem 5 sind diese Distanzen Extrema im Vergleich zu allen anderen β- bzw. α-Längen von benachbarten Berührungsbögen der Kurven $(\mu_{i)})$ bzw. $(\lambda_{i)})$ $(i = 1, 2)$.

Auf Grund von Satz 7 läßt sich aussagen, daß die Bo.El.e $\mathfrak{s}_0$ bzw. $\mathfrak{s}_0^*$ die übereinstimmende β- bzw. α-Länge aller unendlich kleinen Berührungsbögen darstellen, welche die durch die Elemente (x, y, y') und $(x + dx, y + y'dx, y' + dy')$ festgelegten Kurven $(\mu_{1)})$, $(\mu_{2)})$ bzw. $(\lambda_{1)})$, $(\lambda_{2)})$ berühren; insbesondere ist dann nach Satz 8 $\mathfrak{s}_0$ bzw. $\mathfrak{s}_0^*$ auch die β- bzw. α-Distanz der Kurven $(\mu_{1)})$, $(\mu_{2)})$ bzw. $(\lambda_{1)}, \lambda_{2)})$. Die Integrale $\int\limits_{\mathfrak{C}} \mathfrak{s}_0$, $\int\limits_{\mathfrak{C}} \mathfrak{s}_0^*$ selber — also die β- bzw. α-Länge des Bogens $\mathfrak{C}$ — dürfen wir dann auffassen als die Summen der unendlich kleinen β- bzw. α-Distanzen, welche von den durch die kontinuierliche Folge (x, y, y'), $(x + dx,\ y + y'dx,\ y' + dy')$ der Elemente von $\mathfrak{C}$ bestimmten Kurvenpaaren $(\mu_{1)})$, $(\mu_{2)})$ bzw. $(\lambda_{1)})$, $(\lambda_{2)})$ gebildet werden.

Durch eine B.T. (14), (21) läßt sich die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ mit der nicht ausgezeichneten Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ in eine proj.e $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ mit der nicht ausgezeichneten Basis $(0, \infty, \sigma, \tau)$ und somit auch in die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42 a) überführen. Bei dieser ist

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\log u - \log v,\ \tau = \tfrac{1}{2}\log v - \log u \quad (u = x^2 - 2y,\ v = y'^2 - 2(xy' - y)), \tag{280}$$

$$\mathfrak{s}_0 = \frac{\sqrt{v}}{u}\,dx,\ \mathfrak{s}_0^* = \frac{\sqrt{u}}{v}\,dy'. \tag{281}$$

Die B.T., welche die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (85) in die $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ (42 a) verwandelt, verwandelt also die Bo.El.e (240 b) — bis auf etwaige konstante Faktoren — in die Bo.El.e (281).

Das Bo.El. (281_1) ist die nichteuklidische Entfernung der beiden Punkte x, y und und $x + dx, y + y'dx$ oder kurz ihre *Distanz* [38]) in bezug auf den K.S. $x^2 - 2y = 0$, während das Bo.El. (281_2) den nichteuklidischen Winkel oder den *Angulus* [38]) der Geraden durch die Elemente (x, y, y') und $(x + dx, y + y'dx, y' + dy')$ repräsentiert. Man sieht unmittelbar, daß sich die Größen Angulus und Distanz bei geeigneter Wahl der Irrationalitäten $\sqrt{u}, \sqrt{v}$ vertauschen vermöge der automorphen Dualität (115) des K.S.s $x^2 - 2y = 0$. Die Extremalen des Integrals $\int \mathfrak{s}_0$, also die Kurven extremer „Länge", welche zwei gegebene Punkte verbinden, sind die Geraden, während die Extremalen des Integrals $\int \mathfrak{s}_0^*$ die Punkte, als Element-M_1 aufgefaßt, sind. In geometrischer Hinsicht ist das Integral $\int \mathfrak{s}_0^*$ selber offenbar die Summe aller „Winkeldrehungen", welche die Tangente längs des Integrationsweges machen muß, d. h. die Summe aller unendlich kleinen Anguli, welche von den unendlich benachbarten Tangenten der Integrationskurve in kontinuierlicher Folge gebildet werden. Nennen wir diese Summe, also das Integral $\int \mathfrak{s}_0^*$, den *Dreh* des Integrationsweges, dann sehen wir, wie der Extremaleneigenschaft der Geraden in der nichteuklidischen Geometrie die folgende Extremaleneigenschaft der Punkte entspricht: der Dreh eines Berührungsbogens — d. h. einer Berührungs-Element-M_1 — an zwei gegebene Gerade wird ein Extremum für den Schnittpunkt dieser Geraden. Anders ausgedrückt: Will man eine Gerade längs eines Kurven-

[37]) Bei *geschlossenen* $\mathfrak{C}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{C}_\beta$ werden Festsetzungen über die Auswahl eines der beiden abgegrenzten Teilstücke notwendig.

[38]) Wir verwenden hier die Terminologie von Hans Beck in seinem Lehrbuch: Koordinatengeometrie, Bd. I (1919).

bogens — einer Element-M_1 —, d. h. tangential, in die Lage einer zweiten Geraden gleiten lassen, dann wird der von ihr beschriebene Dreh ein Extremum, wenn man die Element-M_1 in den Schnittpunkt der ersten mit der zweiten Geraden übergehen läßt.

Die Punkte sind also die Kurven von der Länge Null, die Geraden die Kurven mit dem Dreh Null.

Die hierin zum Ausdruck kommende polar-dualistische Wechselbeziehung zwischen den Extremal-Minimaleigenschaften der Geraden und Punkte in der nichteuklidischen Kegelschnittsmetrik dürfte wohl zuerst von Friedrich Engel bemerkt worden sein.

2. Auch ein nicht ausgeartetes inv.s Bo.El. $\mathfrak{s}_0$ einer $\mathcal{G}_3^c(c \neq \infty)$ oder $\widehat{\mathcal{G}}_3$ induziert eine Metrik. Ist $\check{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}_0^*$ das zu $\mathfrak{s}_0$ kovariante und zwar ausgeartete Bo.El., dann bleiben die allgemeinen Darlegungen der vorangegangenen Ziffer auch bezüglich der Bo.El.e $\mathfrak{s}_0$, $\check{\mathfrak{s}}$ unverändert bestehen bis auf die wesentliche Abweichung, daß jetzt das Bo.El. $\check{\mathfrak{s}}$ ein vollständiges Differential ist, dessen Extremalen ganz willkürlich bleiben. Daraus folgt wegen des identischen Verschwindens der Variation $\delta \int \check{\mathfrak{s}}$, daß die α-Längen aller stetig ineinander deformierbaren Berührungs-Element-M_1 zweier Kurven (λ_1), (λ_2) gleich groß sein müssen. Die α-Distanz zweier (λ_1'), (λ_2') ist somit gleich der α-Länge aller Berührungs-Element-M_1, welche durch stetige Deformation aus dem Berührungsbogen $\mathfrak{C}_\beta$ hervorgehen. Bei geschlossenen $\mathfrak{C}_\beta$-Kurven gibt es zwei α-Distanzen zweier $\mathfrak{C}_\alpha$ oder zweimal abzählbar unendlich viele, falls geschlossene Umläufe mitgezählt werden.

Bei den Gruppen $\mathcal{G}_3^c(0)$ $(c \neq \infty)$ (42c) oder $\widehat{\mathcal{G}}_3(0)$ (42f) haben wir die folgenden Haupt-Bo.El.e der Basis $(0, \infty, \sigma, \tau)$ (s. (176c, f)):

$$\mathfrak{s}_0 = y'^{\frac{a}{a-b}} dx, \quad \check{\mathfrak{s}} = \frac{1}{y'} dy' \quad (ab \neq 0), \tag{282}$$

$$\mathfrak{s}_0 = e^{-y'} dx, \quad \check{\mathfrak{s}} = dy'. \tag{283}$$

Es ist stets möglich, durch eine B.T. (14), (21) die $\mathcal{G}_3^c(\alpha)$ $(c \neq \infty)$ bzw. $\widehat{\mathcal{G}}_3(\alpha)$ mit der Basis $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ in die Gruppen (42c) bzw. (42f) zu verwandeln, so daß die Bo.Ele (240b) $(\mathfrak{s}_0^* = \check{\mathfrak{s}})$ — bis auf konstante Faktoren — in die Bo.El.e (282) bzw. (283) übergehen.

Mittels der affinen Trf. $\bar{x} = x - iy$, $\bar{y} = y - ix$ sind die Gruppen (42c) mit den Gruppen

$$p, q, ((a + b)\, x + i(a - b)\, y)\, p + ((a + b)\, y - i(a - b)\, x)\, q \tag{284}$$

ähnlich, wobei wir in (284) wieder x, y statt $\bar{x}$, $\bar{y}$ geschrieben haben. Die Basis $(0, \infty, \sigma, \tau)$ und die zugehörigen Haupt-Bo.El.e der Gruppe (284) sind gegeben durch

$$\sigma = -\log(1 + y'^2), \quad \tau = \frac{1}{2}\log(1 + y'^2) + \frac{a + b}{2(a - b)} \log \frac{1 - iy'}{1 + iy'}, \tag{285}$$

$$\mathfrak{s}_0 = \sqrt{1 + y'^2} \left(\frac{1 - iy'}{1 + iy'}\right)^{\frac{a+b}{2(a-b)}} dx, \quad \check{\mathfrak{s}} = \frac{dy'}{1 + y'^2} \tag{286}$$

Für $c = -1$, d. h. $a + b = 0$ wird (284) die $\mathcal{G}_3^{-1}$ $p, q, yp - xq$, die $\mathcal{G}_3$ der euklidischen Bewegungen; (285), (286) lauten dann

$$\sigma = -\log(1 + y'^2), \quad \tau = \tfrac{1}{2}\log(1 + y'^2), \tag{287}$$

$$\mathfrak{s}_0 = \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad \check{\mathfrak{s}} = \frac{dy'}{1 + y'^2}. \tag{288}$$

Hierin ist $\mathfrak{s}_0$ die euklidische Entfernung der Punkte x, y und $x + dx$, $y + y'dx$, $\check{\mathfrak{s}}$ der euklidische Winkel der Geraden durch die Elemente

$$(x, y, y') \text{ und } (x + dx,\ y + y'dx,\ y' + dy').$$

Aus der allgemeinen Theorie ersehen wir, daß der Dreh eines jeden Berührungsbogens zweier Geraden immer gleich einem Winkel dieser Geraden ist. Der Winkel $\int \check{s}$ zweier Geraden ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{1+y'^2}$ erklärt, da die ∞^1 Elemente eines Punktes eine geschlossene Mannigfaltigkeit bilden.

§ 22. Charakterisierung der nicht ausgearteten Bogenelemente $\zeta dx + v dy'$, welche einer G_3 von Berührungstransformationen gegenüber invariant bleiben.

1. Jetzt fragen wir nach der größten Gruppe eines nicht ausgearteten Bo.El.s (223), welches wir uns der Einfachheit halber gleich auf die Form $e^\tau dx$ gebracht denken. Nach (241) wird diese Gruppe durch die beiden Gleichungen

$$M_{21} = \tau_2 M_1 - \tau_1 M_2 + \tau_3 M, \quad M_{22} = 0 \tag{289}$$

definiert. Die Identität (60_2) für $f = M$ liefert vermöge (289) und der ∂-Relationen 3. Stufe die weitere Diffgl. für M:

$$M_{12} = -\sigma_2 M_1 + \sigma_1 M_2 - \sigma_3 M, \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\log(-(\tau_{22} + \tau_2^2)). \tag{290}$$

Da das Bo.El. $e^\tau dx$ als nicht ausgeartet vorausgesetzt worden ist, muß $\tau_{22} + \tau_2^2 \neq 0$ sein. Aus der Identität (60_3) für $f = M$ ergibt sich mit Hilfe von (289), (290) die vierte Defgl. für M:

$$-M_{11} + \alpha(M_{12} + M_{21}) - \alpha_2 M_1 + \alpha_1 M_2 - \alpha_3 M = 0, \quad \alpha = \frac{\tau_{12} - 2\tau_{21} - \tau_1\tau_2}{-(\tau_{22} + \tau_2^2)}. \tag{291}$$

Die Defgl. (291_1) hätten wir als die Invarianzbedingung der zu $e^\tau dx$ kovarianten Extremalendiffgl. $y'' + \alpha = 0$ von vornherein hinschreiben können. Auf Grund von Satz 1 folgt also:

Satz 12. *Ein nicht ausgeartetes Bo.El.* (223) *gestattet höchstens eine dreigliedrige Gruppe; ist diese dreigliedrig, dann ist sie eine* G_3^2.

Aus diesem Satz und Theorem 5 ist zu schließen, *daß Minimalen- und Extremalendiffgl. eines nicht ausgearteten, eine* G_3 *gestattenden Bo.El.s* (223) *polar sind.* Das umgekehrte hingegen gilt im allgemeinen nicht. Denn angenommen, die Extremalendiffgl. des nicht ausgearteten Bo.El.s $e^\tau dx$ sei $y'' = 0$, d. h. nach (291_2) sei

$$\tau_{12} - 2\tau_{21} - \tau_1\tau_2 = 0. \tag{292}$$

Soll dann die durch (289)—(292) definierte Gruppe eine G_3^2 sein, so muß u. a. die Relation (131^*_1), worin $\mathsf{A}(\frac{1}{4})$ der Ausdruck ($67''_1$) ist, vermöge (292) erfüllt werden; dies wird aber nur in Ausnahmefällen zutreffen. *Also gestattet ein nicht ausgeartetes Bo.El.* (223) *im allgemeinen auch dann keine* G_3, *wenn seine Minimalen- und Extremalen-Diffgl. ein polares Paar bilden.*

Wir wollen daher die Bedingungen aufsuchen, denen die Größen ζ, v genügen müssen, damit (223) eine G_3 gestattet. Nach Satz 12 bestimmt jedes nicht ausgeartete Bo.El. (223) seine G_3 eindeutig; nach Theorem 5 kann diese eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$; $\mathcal{G}_3^c$ ($c \neq \infty$) oder $\widehat{\mathcal{G}}_3$ sein. Aus dem Bo.El. (223) finden wir folgendermaßen die zugehörige Basis (α, β, σ, τ) seiner Gruppe G_3^2. Wir identifizieren das Bo.El. (223) selber mit dem Bo.El. ($240\mathrm{b}_1$) und seine Extremalendiffgl. (233) mit der Diffgl. $y'' + \alpha = 0$, d. h. wir setzen

$$\boxed{\tau = \log v, \ \beta = \frac{\zeta}{v}, \ \alpha = \frac{\zeta_{12} - 2\zeta_{21} + v_{11}}{2v_{12} - v_{21} - \zeta_{22}} \equiv \frac{\bar{\zeta}}{\bar{v}}.} \tag{293}$$

Die linke Seite von (234) muß nach Voraussetzung von Null verschieden sein. Wir finden, daß sie gleich $e^{2\tau}\mathsf{B}$ wird, wo B die Größe (97_2) bedeutet, wenn wir vermöge (293) v und ζ

durch τ und β ausdrücken. Es muß daher $\mathsf{B} \neq 0$ ausfallen. Aus (95_4) finden wir dann für σ den Wert

$$\boxed{\sigma = \tfrac{1}{2}\log(\bar{\omega}^2\mathsf{B}) - \tfrac{1}{2}\log \mathsf{B}_{0)}.} \tag{294}$$

Multiplizieren wir ferner (293_3) mit dem Nenner und bringen alle Glieder auf die linke Seite, dann kommt $e^{\tau}\Gamma = 0$, d. h. $\Gamma = 0$, unter Γ die Größe (97_4) verstanden. Endlich wird, wie wir sogleich sehen werden, vermöge (294) und $\Gamma = 0$ auch $\chi = 0$. Durch (293), (294) ist dann die zum Bo.El. (223) gehörige Basis der betreffenden G_3^2 bestimmt und zugleich sind die Bedingungen festgestellt:

$$\boxed{\mathsf{B} \neq 0, \Gamma = \chi = 0.} \tag{295}$$

Daß die Beziehungen (294) und $\Gamma = 0$ das Verschwinden von χ nach sich ziehen, hat seinen Grund in der zweiten der beiden Identitäten

$$\boxed{\mathsf{A}_\beta + (\sigma_\beta - \bar{\omega}\pi)\,\mathsf{A} \equiv \Gamma_\alpha + (\sigma_\alpha - \bar{\omega}\pi)\Gamma,\ \ \mathsf{B}_\alpha + (\tau_\alpha - \bar{\omega}\pi)\,\mathsf{B} \equiv \Gamma_\beta + (\tau_\beta - \bar{\omega}\pi)\,\Gamma,} \tag{296}$$

welche für die Größen $(97_{1,3})$ und $(97_{2,4})$ echte Identitäten sind, jedoch für die Größen $(87_{4,5,6})$ nur unter der Voraussetzung von (91) gelten. Am einfachsten gewinnt man die Identitäten (296) aus den Identitäten (69′) durch Ausübung der B.T. (14), (21). Die Identitäten (93) sind eine Folge von (296) und (70) (vgl. (71)).

Wollen wir jetzt die Beziehungen erhalten, welche zwischen ζ, v stattfinden müssen, damit das Bo.El. (223) gegenüber einer G_3^2 inv. bleibt, dann brauchen wir nur die Größen (293), (294) in die Relationen des Theorems 1 einzusetzen. Von diesen Relationen sind wegen (295) und (294) nur noch die folgenden zu fordern:

$$\boxed{(24);\ \psi\mathsf{A} = 0;\ (91\,\mathrm{a}^*),\ (104_1)\ \ (\mathsf{A} = \mathsf{A}(\tfrac{1}{4})\ \text{s.}\ (97_1'))\,.} \tag{297}$$

Zweckmäßigerweise haben wir dabei $(92\,\mathrm{a}_1)$ durch (104_1) ersetzt.

Ist in (223) $v = 0$, dann gehört zu dem Bo.El. ζdx eine Basis $(\alpha, \infty, \sigma, \tau)$ seiner G_3^2, deren Haupt-Bo.El.e (240c) sind. Mithin treten an die Stelle der Formeln (293), (294) diese:

$$\tau = \log\zeta,\ \ \beta = \infty,\ \ \alpha = \frac{\zeta_{12} - 2\zeta_{21}}{-\zeta_{22}}, \tag{298}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\log\mathsf{B} - \tfrac{1}{2}\log\mathsf{B}_{0)}, \tag{299}$$

während die Relationen (295) bestehen bleiben; die Relationen (297) werden ersetzt durch

$$(124);\ \psi\mathsf{A} = 0;\ (62\,\mathrm{a}^*),\ (131^*_1)\ \ (\mathsf{A} = \mathsf{A}(\tfrac{1}{4})\ \text{s.}\ (129_1')). \tag{300}$$

$\mathsf{B}, \Gamma, \chi, \psi$ bedeuten jetzt die Größen $(129_{2,4})$, $(127_{2,3})$.

Wenn dagegen die Extremalendiffgl. des Bo.El.s (223) die Diffgl. $y'' = \infty$ ist, d. h. wenn nach (233) $2v_{12} - v_{21} - \zeta_{22} \equiv \bar{v} = 0$, dann nehmen wir in (293), (294), (295), (297) die Substitution $(\alpha\,\beta)\,(\sigma\tau)$ vor und gehen zur Grenze $\bar{v} \to 0$, d. h. $\beta \to \infty$ über, so daß also die Größen

$$\sigma = \log v,\ \ \alpha = \frac{\zeta}{v}\ (\beta = \infty), \tag{301}$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}\log\mathsf{A} - \tfrac{1}{2}\log\mathsf{A}_{0)}, \tag{302}$$

welche die Beziehungen

$$\mathsf{A} \neq 0,\ \ \Gamma = \psi = 0 \tag{303}$$

erfüllen, in die Relationen

$$(124);\ \chi\mathsf{B} = 0;\ (62\,\mathrm{a}),\ (131_1)\ \ (\mathsf{B} = \mathsf{B}(\tfrac{1}{4})\ \text{s.}\ (129_2')) \tag{304}$$

einzusetzen sind; $\mathsf{A}, \Gamma, \chi, \psi$ sind dabei die Größen $(129_{1,3})$, $(127_{2,3})$.

Auf Grund einer Bemerkung anläßlich § 18, 1 kann man die in den Grenzfällen $v = 0$ bzw. $\bar{v} = 0$ bestehenden Beziehungen zwischen ζ, v auch erhalten, indem man mit (297) die Substitution $\mathfrak{S}$ — d. h. hier die Substitution $(\zeta v)\,(\partial_1 \partial_2)$ — vornimmt und $v \to 0$ bzw. $\bar{v} \to 0$ streben läßt.

Wollen wir nun wissen, wann die von dem nicht ausgearteten Bo.El. (223) gestattete G_3^2 eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$; $\mathcal{G}_3^c (c \neq \infty)$; $\widehat{\mathcal{G}}_3$ ist, dann brauchen wir nur die Relationen (293)—(295), (297) mit den Relationen (185a; c ($c \neq \infty$); f) zu verknüpfen. Dabei bereitet es keinerlei Schwierigkeiten, die Grenzfälle $v = 0$ und $\bar{v} = 0$ mit zu berücksichtigen.

Zusammengefaßt stellen sich die hiermit gewonnenen Ergebnisse dar in dem

Theorem 6. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß das nicht ausgeartete Bo.El.* $\zeta dx + v dy'$ [ζdx] *eine* G_3^2 *gestatte, sind die Relationen, welche durch Einsetzen der Größen* (293), (294) [(298), (299)] *in* (297) [(300)] *hervorgehen*; B, Γ, χ, ψ *sind dabei die Größen* ($97_{2,4}$), ($87_{2,3}$) [($129_{2,4}$), ($127_{2,3}$)].

Soll die G_3^2 *eine* $\widetilde{\mathcal{G}}_3$; $\mathcal{G}_3^c (c \neq \infty)$; $\widehat{\mathcal{G}}_3$ *sein, dann spezialisieren sich die allgemeinen Relationen* (297) [(300)] *folgendermaßen*:

$$(305)\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{(a) } \widetilde{\mathcal{G}}_3 : (24)\,[(124)];\ \ \psi = 0,\ \mathsf{A} \neq 0;\ \ (104_1)\,[(131^*{}_1)] \\ \text{(b) } \mathcal{G}_3^c (c \neq \infty) : (24)\,[(124)];\ \ \mathsf{A} = 0,\ \ \mathsf{B}\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0,\ \ c = -\frac{\mathsf{B}(\frac{1}{2})}{\mathsf{B}} \\ \text{(c) } \widehat{\mathcal{G}}_3 : (24)\ [(124)];\ \ \mathsf{A} = \mathsf{B}(\tfrac{1}{4}) = 0 \\ \qquad\qquad (\mathsf{A} = \mathsf{A}(\tfrac{1}{4})\ \text{s.}\ (97_1')\ [(129_1')]) \end{array}}$$

Im Grenzfalle $\bar{v} = 0$ *treten an die Stelle der Relationen* (298), (299), (300), (305) *die Relationen* (301), (302), (304) *und*

$$(306)\quad \begin{array}{l} \text{(a) } \widetilde{\mathcal{G}}_3 : (124);\ \ \chi = 0,\ \mathsf{B} \neq 0;\ \ (131_1) \\ \text{(b) } \mathcal{G}_3^c (c \neq \infty) : (124);\ \ \mathsf{B} = 0,\ \ \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) \neq 0,\ \ c = -\dfrac{\mathsf{A}(\frac{1}{2})}{\mathsf{A}} \\ \text{(c) } \widehat{\mathcal{G}}_3 : (124);\ \ \mathsf{B} = \mathsf{A}(\tfrac{1}{4}) = 0 \\ \qquad\qquad (\mathsf{B} = \mathsf{B}(\tfrac{1}{4})\ \text{s.}\ (129_2'));\end{array}$$

A, Γ, χ, ψ *sind jetzt die Größen* ($129_{1,3}$), ($127_{2,3}$).

Führt man in den zwischen ζ, v *bestehenden Diffgl.n* (297) *bzw.* (305) *die Substitution* $(\zeta v)\,(\partial_1 \partial_2)$ *und anschließend den Grenzübergang* $v \to 0$ *oder* $\bar{v} \to 0$ *aus, dann gewinnt man ebenfalls die in diesen Grenzfällen gültigen Bedingungen.*

2. Nach den Darlegungen im vorangegangenen § 21 kann jedes nicht ausgeartete Bo.El. (223), welches eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ oder $\mathcal{G}_3^c (c \neq \infty)$ oder $\widehat{\mathcal{G}}_3$ gestattet, durch B.T. die Gestalt (281_1) oder (286_1) oder (283_1) enthalten, wenn von konstanten Faktoren zunächst abgesehen wird. Bei den $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ kann dieser konstante Faktor nicht beseitigt werden, wohl aber bei den $\mathcal{G}_3^c (c \neq \infty)$ und $\widehat{\mathcal{G}}_3$. Soll es nämlich möglich sein, das nicht ausgeartete Bo.El. ς_0 in das Bo.El. $a\varsigma_0$ zu transformieren, dann muß die das leistende Trf. sowohl die betreffende G_3^2 inv. lassen als auch die polaren Diffgl.n $\varsigma_0 = 0$ und $\varsigma_0^* = 0$, unter ς_0^* das zu ς_0 kovariante Bo.El. verstanden. Bezüglich einer $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ gibt es keine anderen Trf.n mit dieser Eigenschaft außer den in der $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ selber enthaltenen. Dagegen stecken in den $G_{\max}(\mathcal{G}_3^c)$ ($c \neq \infty$) und $G_{\max}(\widehat{\mathcal{G}}_3)$ Trf.n, welche das Bo.El. ς_0 mit jedem beliebigen konstanten Faktor multipliziert reproduzieren.

Es möge noch erwähnt werden, daß, wie man am Beispiel der Gruppen (42b, c, f) leicht ersieht, die nicht ausgearteten inv.n Bo.El.e einer G_3^2 bis auf konstante Faktoren

ineinander übergeführt werden können vermöge der von der kommutablen inf. Trf. erzeugten G_1.

Bekanntlich läßt sich das euklidische Bo.El. (288_1) durch einen Grenzübergang aus dem allgemeinen nichteuklidischen K.S.-Bo.El. ableiten. Dieser Zusammenhang muß auch in der allgemeinen Theorie wiederkehren. Sind daher $\tilde{\varsigma} = e^{\tilde{\tau}}(\beta dx + dy')$ und $\varsigma = e^{\tau}(\beta dx + dy')$ zwei nicht ausgeartete Bo.El.e mit derselben Extremalendiffgl., welche eine $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ bzw. $\mathcal{G}_3^{-1}$ mit der Basis $(\alpha, \beta, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ bzw. $(\alpha, \beta, \sigma, \tau)$ gestatten, dann muß sich eine Folge von Bo.El.n $\tilde{\varsigma}_i = e^{\tilde{\tau}_i}(\beta dx + dy')$ $(i = 1, 2, \ldots)$ angeben lassen, welche die Gruppen $\widetilde{\mathcal{G}}_{3,i}$ mit den Basen $(\alpha, \beta, \tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_i)$ gestatten und welche nach dem Bo.El. $\varsigma = e^{\tau}(\beta dx + dy')$ konvergieren (so daß also auch $(\alpha, \beta, \tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_i) \to (\alpha, \beta, \sigma, \tau)$). In der Tat gehen die Relationen (305b) für $c = -1$, d. h. $\psi = 0$, aus (305a) durch den Grenzübergang $A = 0$ hervor.

Eingegangen 1. Februar 1939.

Geschlechter quadratischer Formen.

Von *Hel Braun* in Göttingen.

§ 1. Einleitung.

Es war seit einigen Jahren erwünscht die Theorie der Geschlechter quadratischer Formen mit mehr als zwei Variablen so zu entwickeln, daß ihre Ergebnisse bequem auf andere Fragen aus der Theorie der quadratischen Formen angewandt werden können. Im vorliegenden Aufsatz wird gezeigt auf welche Art das geschehen kann. Es ist dabei vorteilhaft von der folgenden Definition eines Geschlechts auszugehen:

$\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ seien symmetrische Matrizen mit ganzen rationalen Elementen. Man nennt $\mathfrak{S}_1$ äquivalent $\mathfrak{S}_2$, in Zeichen: $\mathfrak{S}_1 \sim \mathfrak{S}_2$, wenn $\mathfrak{S}_1$ durch $\mathfrak{S}_2$ und umgekehrt auch $\mathfrak{S}_2$ durch $\mathfrak{S}_1$ darstellbar ist; das heißt also: wenn es zwei ganze Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gibt (deren Transponierte $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ seien), so daß

$$(*) \qquad \mathfrak{A}'\mathfrak{S}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_2\,, \qquad \mathfrak{B}'\mathfrak{S}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_1$$

ist. Äquivalente Matrizen bilden eine Klasse.

Nun sei q irgendeine natürliche Zahl. Man nennt dann $\mathfrak{S}_1$ äquivalent $\mathfrak{S}_2$ modulo q, in Zeichen: $\mathfrak{S}_1 \sim \mathfrak{S}_2 \pmod q$, wenn

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}_1\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{S}_2 \pmod q\,, \qquad \mathfrak{B}'\mathfrak{S}_2\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{S}_1 \pmod q$$

ist mit ganzem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Alle modulo q äquivalenten Matrizen bilden eine *Klasse modulo q*.

Ganz entsprechend nennt man $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ reell äquivalent, wenn die beiden Gleichungen (*) mit reellem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestehen.

Man faßt jetzt alle diejenigen symmetrischen ganzzahligen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ zu einem Geschlecht zusammen, die nach jedem natürlichen Modul und außerdem reell äquivalent sind. Alle Matrizen einer Klasse gehören trivialerweise zum selben Geschlecht, aber im allgemeinen besteht ein Geschlecht aus mehreren Klassen. Man kann nun zeigen, daß es in jeder Klasse Matrizen gibt deren Determinante $\neq 0$ ist. Deswegen wird von jetzt ab immer angenommen, die Determinanten der betrachteten symmetrischen Matrizen seien von Null verschieden. Es ist sofort zu sehen, daß unter dieser Voraussetzung zwei symmetrische ganzzahlige Matrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn sie durch unimodulare Transformation auseinander hervorgehen; wenn also $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}'\mathfrak{S}_2\mathfrak{U}$ ist, mit ganzzahligem $\mathfrak{U}$, dessen Determinante den Wert $+1$ oder -1 hat.

Alle diese für symmetrische Matrizen ausgesprochenen Definitionen und Sätze sind sinngemäß zu übertragen auf die mit diesen Matrizen gebildeten quadratischen Formen.

Gauß ist in seinen Untersuchungen über binäre quadratische Formen von einer anderen Geschlechtsdefinition ausgegangen. Er hat dabei vorausgesetzt, daß die Elemente der gegebenen symmetrischen zweireihigen Matrix $\mathfrak{S}$ teilerfremd sind, daß also $\mathfrak{S}$ primitiv ist. Das Geschlecht von $\mathfrak{S}$ hat er festgelegt durch die Determinante und durch

endlich viele Legendresche quadratische Restsymbole, die Geschlechtscharaktere. Gauß zeigte, daß zu vorgegebenem Charaktersystem genau dann ein Geschlecht primitiver Formen der vorgeschriebenen Determinante gehört, wenn das Produkt über sämtliche Charaktere den Wert + 1 hat. Dieser Gaußsche Satz wurde auf ternäre Formen von Eisenstein und Smith, auf quadratische Formen mit mehr als drei Variablen von Minkowski übertragen. Wenn man für Formen mit mehr als zwei Variablen ein endliches vollständiges System von Geschlechtsinvarianten aufstellen will, die den Gaußschen Invarianten entsprechen, so hat man die Elementarteiler und das dyadische Verhalten der Formen des Geschlechts wesentlich zu beachten. Infolgedessen kommt man zwangsläufig zu Fallunterscheidungen, die alle Resultate unübersichtlich und unhandlich machen.

Es erscheint deshalb vernünftig ein anderes vollständiges endliches System von Geschlechtsinvarianten zum Ausgangspunkt zu nehmen, wenn man die Geschlechtertheorie so entwickeln will, daß ihre Sätze bequem anwendbar sind. Zu diesem System wird man durch folgende Überlegung geführt:

Die Signatur einer m-reihigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{S}$ sei so erklärt: Man kann bekanntlich $\mathfrak{S}$ reell in eine Diagonalmatrix transformieren deren Diagonalelemente die Werte + 1 oder — 1 haben. Es sei μ die Anzahl der Diagonalelemente + 1, also $m - \mu$ die Anzahl der Diagonalelemente — 1. Dann nennt man das Zahlenpaar $\mu, m - \mu$ die Signatur von $\mathfrak{S}$. Die Signatur ist nach dem Trägheitsgesetz eine Geschlechtsinvariante. Man sieht leicht ein, daß auch der absolute Betrag der Determinante eine Geschlechtsinvariante ist; dieser absolute Betrag sei mit D bezeichnet. Ferner sei $8D^3 = q_0$ gesetzt. Dann gilt der

Satz I. (α) *Signatur* μ, $m - \mu$
(β) *absoluter Betrag* D *der Determinante*
(γ) *Klasse modulo* q_0
bilden ein vollständiges endliches System von Geschlechtsinvarianten.

Dabei läßt sich die Klasse modulo q_0 festlegen durch irgendeine ihr angehörige ganze m-reihige symmetrische Matrix. Satz I besagt in anderen Worten: $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gehören dann und nur dann zum selben Geschlecht, wenn sie gleiche Signatur haben, der absolute Betrag ihrer Determinanten der gleiche ist und die Äquivalenz $\mathfrak{S}_1 \sim \mathfrak{S}_2 \pmod{q_0}$ erfüllt ist. Dieser Satz war bereits Minkowski [1]) bekannt, einen Beweis findet man bei Siegel [2]).

Jetzt bleibt noch die Frage offen: *Wann kann zu gegebenen Invarianten* (α), (β), (γ) *ein Geschlecht quadratischer Formen gefunden werden*?

Im folgenden wird sich zeigen, daß diese Frage in einfacher Weise beantwortet werden kann. Zuerst wird man nämlich sehen, daß zwischen den Invarianten (α), (β), (γ) zwei Relationen bestehen müssen. Erstens muß für die Repräsentanten $\mathfrak{S}$ der Klasse modulo q_0 die Kongruenz

$$(\delta) \qquad |\mathfrak{S}| \equiv x^2 (-1)^{m-\mu} D \pmod{q_0}$$

durch ein zu q_0 teilerfremdes x lösbar sein. Zweitens muß für jedes $\mathfrak{S}$ der Klasse modulo q_0 die Relation

$$(\varepsilon) \qquad \sum_{\mathfrak{x}(q_0)} e^{\frac{2\pi i}{q_0} \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}} = e^{\frac{\pi i}{4}(2\mu - m)} (2q_0)^{\frac{m}{2}} D^{\frac{1}{2}}$$

bestehen. Dabei wird in der Gaußschen Summe über die sämtlichen Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_m$ der Spalte $\mathfrak{x}$ summiert, die unabhängig voneinander ein volles Restsystem mod q_0 durch-

[1]) H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen **1** (Leipzig 1911), 158.

[2]) C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen (in der Folge kurz mit S. bezeichnet), Annals of Math. **36** (1935), 548.

laufen. Es ist einfach zu sehen, daß die Relation (δ) bestehen muß. Daß auch (ε) erfüllt ist, wenn das Geschlecht existiert, ist leicht zu sehen, wenn man die Reziprozitätsformel für die Gaußschen Summen anwendet. Schwieriger ist dann, den Satz II zu beweisen, der kurz als *Geschlechtersatz* bezeichnet werden soll:

Satz II. *Zu gegebenen Invarianten* (α), (β), (γ) *existiert, falls die Relationen* (δ) *und* (ε) *erfüllt sind, ein Geschlecht quadratischer Formen.*

Dieser Satz wird im vierten und fünften Paragraphen bewiesen.

Man beachte übrigens, daß $q_0 = 8D^3$ nicht der kleinste Modul ist, für den Signatur, absoluter Betrag der Determinante und Klasse modulo q_0 das Geschlecht vollständig bestimmen. Es ist nur bequem, beim Beweis von Satz I vorauszusetzen, daß $q_0 = 8D^3$, oder allgemeiner, daß q_0 ein fester, durch $8D^3$ teilbarer Modul ist. Dann kann man nämlich im Beweis von Satz I von den Elementarteilern absehen. Minkowski hat behauptet, daß Satz I gilt, wenn q_0 nur durch $2D$ teilbar ist. Vermutlich kann auch diese Bedingung noch durch eine geringere ersetzt werden, in der dann allerdings die Elementarteiler explizit auftreten. Beim Beweis des Geschlechtersatzes wird von q_0 nur verlangt, daß es durch $8DP$ teilbar ist, wobei P das Produkt über die ungeraden Primteiler von D bedeutet.

Da die beiden Existenzkriterien (δ) und (ε) eine sehr einfache Gestalt haben, ist es möglich, ohne viel Rechnung aus dem Geschlechtersatz einen weiteren, von Siegel auf anderem Wege bereits bewiesenen Existenzsatz herzuleiten. Dieser Satz bezieht sich nicht mehr auf äquivalente Matrizen, sondern auf irgendwelche ganzzahlige symmetrische Matrizen, die verschiedenen Rang haben können. Man geht deshalb aus von einer ganzen m-reihigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{S}$ und einer ganzen n-reihigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{T}$, wobei $n \leqq m$ sei. Ferner nimmt man an es sei $|\mathfrak{S}| \cdot |\mathfrak{T}| \neq 0$. Man betrachtet dann einerseits die Kongruenz

$$(**) \qquad \mathfrak{X}' \mathfrak{S} \mathfrak{X} \equiv \mathfrak{T} \pmod{q}$$

für jedes natürliche q und andrerseits die Gleichung

$$(***) \qquad \mathfrak{X}' \mathfrak{S} \mathfrak{X} = \mathfrak{T}.$$

Dabei muß $\mathfrak{X}$ m-zeilig und n-spaltig sein. Über die Beziehungen zwischen der Lösbarkeit von (**) und (***) in *rationalen* $\mathfrak{X}$ gibt der *Hasse-Legendresche Satz* Aufschluß. Dieser Satz besagt:

Die Gleichung (***) *ist dann und nur dann mit rationalem* $\mathfrak{X}$ *lösbar, wenn* (**) *für jedes natürliche* q *mit rationalem* $\mathfrak{X}$ *und* (***) *mit reellem* $\mathfrak{X}$ *lösbar ist.*

Man fragt nun danach, ob auch (***) *ganz-rational* lösbar ist, wenn (**) für jedes q mit ganzem $\mathfrak{X}$ und (***) reell lösbar ist. Das Beispiel

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{T} = (1)$$

zeigt, daß dies nicht immer der Fall ist. Es gilt aber folgender

Satz III. *Vorausgesetzt sei, daß* (**) *für jedes* q *mit ganzem* $\mathfrak{X}$ *und* (***) *reell lösbar ist. Dann gibt es im Geschlecht von* $\mathfrak{S}$ *ein* $\mathfrak{S}^*$, *für das*

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{S}^* \mathfrak{X} = \mathfrak{T}$$

mit ganzem $\mathfrak{X}$ *lösbar ist.*

Siegel hat diesen Satz unter Benutzung des Hasse-Legendreschen Satzes bewiesen [3]). Im sechsten Paragraphen des vorliegenden Aufsatzes soll gezeigt werden, wie man diesen Satz ohne Verwendung der rationalen Theorie der quadratischen Formen aus dem Geschlechtersatz ableiten kann. Der so gefundene Beweis von Satz III ist dann einheitlicher als der

[3]) S., 550.

Siegelsche, weil man direkt von der mod q ganzzahligen Lösbarkeit von (**) auf die ganzzahlige Lösbarkeit von $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}^*\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ schließt.

Es sei noch bemerkt, daß der Vorteil des Geschlechtersatzes gegenüber den bisherigen Resultaten der Geschlechtertheorie darin liegt, daß weder Elementarteiler noch quadratische Restsymbole explizit vorkommen. Infolgedessen ist es nicht nötig, bei der Formulierung dieses Satzes Fallunterscheidungen zu machen, was bei den bisherigen Sätzen der Geschlechtertheorie immer nötig war. Ferner wird es aus dem gleichen Grund auch nicht allzu schwierig sein, den Geschlechtersatz auf quadratische Formen in algebraischen Zahlkörpern zu übertragen.

§ 2. Hilfsbetrachtungen über Gaußsche Summen.

Beim Beweis des Geschlechtersatzes sind die Gaußschen Summen von Bedeutung weil sie bestimmte Invarianzeigenschaften und eine Reziprozitätsformel haben.

Man definiert für die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ mit der ganzen m-reihigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{S}$ und der variablen m-gliedrigen Spalte $\mathfrak{x}$, deren Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_m$ seien, die Gaußsche Summe $G_q(\mathfrak{S})$ durch

$$G_q(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{x}(q)} e^{\frac{2\pi i}{q}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}} . \tag{1}$$

Dabei ist q irgendein fester natürlicher Modul, und die Elemente von $\mathfrak{x}$ durchlaufen unabhängig voneinander ein volles Restsystem mod q. Die Summe $G_q(\mathfrak{S})$ ändert sich nicht, wenn man die Elemente von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{x}$ durch andere Repräsentanten ihrer Restklasse mod q ersetzt. Ist ferner $\mathfrak{B}$ eine m-reihige Matrix, deren Determinante zu q teilerfremd ist, also eine mod q ganzzahlig umkehrbare Matrix, so gilt

$$G_q(\mathfrak{S}) = G_q(\mathfrak{B}'\mathfrak{S}\mathfrak{B}) . \tag{2}$$

Denn mit $\mathfrak{x}$ durchläuft auch $\mathfrak{B}\mathfrak{x}$ ein volles Restsystem mod q. Man nennt Matrizen $\mathfrak{B}$ mit dieser Eigenschaft unimodular mod q. Deshalb kann man Formel (2) auch so aussprechen: $G_q(\mathfrak{S})$ ist invariant gegenüber mod q unimodularer Transformation von $\mathfrak{S}$.

In der Folge werden noch einige andere Eigenschaften von $G_q(\mathfrak{S})$ benutzt, die ebenfalls leicht aufzuweisen sind. Man sieht ohne weiteres, daß bei beliebigem natürlichem a

$$G_{aq}(a\mathfrak{S}) = a^m G_q(\mathfrak{S}) \tag{3}$$

ist. Ferner ist für $q = rk$ mit $(r, k) = 1$

$$G_q(\mathfrak{S}) = G_r(k\mathfrak{S})\, G_k(r\mathfrak{S}) . \tag{4}$$

Um das nachzuprüfen, braucht man nur in (1)

$$\mathfrak{x} = r\mathfrak{y} + k\mathfrak{z}$$

einzutragen, wo $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ m-gliedrige variable Spalten bedeuten. Wenn nämlich die Elemente von $\mathfrak{y}$ ein volles Restsystem mod k und die Elemente von $\mathfrak{z}$ ein volles Restsystem mod r durchlaufen, so durchlaufen die Elemente von $\mathfrak{x}$ ein volles Restsystem mod q. Bei dieser Substitution wird

$$(r\mathfrak{y} + k\mathfrak{z})'\mathfrak{S}(r\mathfrak{y} + k\mathfrak{z}) = r^2\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} + 2rk\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{z} + k^2\mathfrak{z}'\mathfrak{S}\mathfrak{z} .$$

Da $2\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{z}$ für ganzes $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ stets ganz ist, erhält man aus (1) sofort (4).

Nun sei $\mathfrak{S}$ einreihig, und zwar $\mathfrak{S} = qd$, wobei d eine ganze von Null verschiedene Zahl bedeutet. Weiter sei p eine zu $2qd$ teilerfremde Primzahl, und $\left(\frac{d}{p}\right)$ bedeute das Legendresche quadratische Restsymbol. Dann ist

$$G_p(qd) = \left(\frac{d}{p}\right) G_p(q) . \tag{5}$$

Einen einfachen Beweis dieser Formel findet man z. B. bei Bachmann [4]).

[4]) P. Bachmann, Die analytische Zahlentheorie (Leipzig 1894), 155.

Während man die bisherigen Formeln über Gaußsche Summen durch algebraische Umformungen erhält, braucht man zum Beweis der folgenden Reziprozitätsformel analytische Hilfsmittel. Der absolute Betrag der Determinante von $\mathfrak{S}$ sei mit s bezeichnet. Wie in der Einleitung bedeute das Zahlenpaar μ, $m-\mu$ die Signatur von $\mathfrak{S}$; weiter sei $\mu-(m-\mu)=\sigma$ gesetzt. Man nennt $\mathfrak{S}$ gerade oder ungerade, je nachdem die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ nur gerade Zahlen darstellt oder auch ungerade. *Sind jetzt a und b natürliche Zahlen derart, daß ab gerade ist bei ungeradem $\mathfrak{S}$, dann gilt die Reziprozitätsformel*

$$b^{-\frac{m}{2}} \sum_{\mathfrak{x}(b)} e^{\frac{\pi i a}{b}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}} = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma}\, a^{-\frac{m}{2}}\, s^{\frac{1}{2}-m} \sum_{\mathfrak{x}(sa)} e^{-\frac{\pi i b}{a}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{x}} . \tag{6}$$

Diese Formel wurde von Krazer bewiesen [5]). Der Beweis sei hier noch einmal kurz angegeben, weil die Formel für die weiteren Überlegungen grundlegend ist.

Beweis. Für variables positives λ wird

$$\lambda\mathfrak{E} - i\frac{a}{b}\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$$

gesetzt, wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix bedeutet. Ferner sei

$$f(\lambda) = \sum_{\mathfrak{x}} e^{-\pi\mathfrak{x}'\mathfrak{T}\mathfrak{x}} , \tag{7}$$

wo $\mathfrak{x}$ alle ganzen m-gliedrigen Spalten durchläuft. Weil $\lambda > 0$ ist, konvergiert diese Reihe absolut. Aus der Transformationsformel der ϑ-Funktion ergibt sich dann, daß $f(\lambda)$ auch die Entwicklung

$$f(\lambda) = |\mathfrak{T}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{x}} e^{-\pi\mathfrak{x}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}}$$

hat. Man rechnet sich aus, daß dabei

$$\mathfrak{T}^{-1} = i\frac{b}{a}\mathfrak{S}^{-1} + \lambda\frac{b^2}{a^2}\mathfrak{S}^{-2}(\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{T}^{-1})$$

ist. Nun macht man die Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + sa\mathfrak{x}$ und läßt $\mathfrak{x}_1$ alle Reste mod sa und $\mathfrak{x}$ wieder alle ganzen Spalten durchlaufen. Dann wird

$$f(\lambda) = |\mathfrak{T}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{x}_1(sa)} e^{-\pi i\frac{b}{a}\mathfrak{x}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{x}_1} \sum_{\mathfrak{x}} e^{-\pi\lambda b^2 s^2(a^{-1}s^{-1}\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x})'\mathfrak{S}^{-2}(\mathfrak{E}-\lambda\mathfrak{T}^{-1})(a^{-1}s^{-1}\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x})} .$$

Deshalb wird für $\lambda \to 0$

$$f(\lambda) \sim |\mathfrak{T}|^{-\frac{1}{2}} (b^2\lambda)^{-\frac{m}{2}} s^{1-m} \sum_{\mathfrak{x}_1(sa)} e^{-\pi i\frac{b}{a}\mathfrak{x}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{x}_1} .$$

Dabei ist noch der Wert von $|\mathfrak{T}|^{-\frac{1}{2}}$ für $\lambda \to 0$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck transformiert man $\lambda\mathfrak{E} - i\frac{a}{b}\mathfrak{S}$ mit einer solchen reellen orthogonalen Matrix $\mathfrak{D}$, für die $\mathfrak{D}'\mathfrak{S}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$ ist, wobei $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix bedeutet. Die Diagonalelemente von $\mathfrak{D}$ seien mit $d_1, d_2, \ldots, d_m$ bezeichnet. Dann wird

$$\left|\lambda\mathfrak{E} - i\frac{a}{b}\mathfrak{S}\right| = \left|\lambda\mathfrak{E} - i\frac{a}{b}\mathfrak{D}\right| = \prod_{k=1}^{m}\left(\lambda - i\frac{a}{b}d_k\right) .$$

Da λ positiv war, wird für $\lambda \to 0$

$$|\mathfrak{T}|^{-\frac{1}{2}} \sim s^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} .$$

---

[5]) A. Krazer, Zur Theorie der mehrfachen Gaußschen Summen, H. Weber-Festschrift (Leipzig 1912), 181.

Andrerseits erhält man aus (7) für $\lambda = 0$

$$f(\lambda) \sim (b^2\lambda)^{-\frac{m}{2}} \sum_{\mathfrak{x}(b)} e^{\pi i \frac{a}{b} \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}} .$$

Aus den drei asymptotischen Gleichungen folgt jetzt sofort die Richtigkeit der Formel (6).

Aus der Reziprozitätsformel (6) folgt eine weitere für den Beweis des Geschlechtersatzes wichtige Formel. Es ist dabei zweckmäßig den Nenner einer rationalen Matrix zu definieren. Man nennt die symmetrische Matrix $\mathfrak{M} = (m_{kl})$ halbganz, wenn die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{M}\mathfrak{x}$ ganz ist für alle ganzen $\mathfrak{x}$, wenn also m_{kk} und $2m_{kl}$ $(l \neq k)$ ganz sind. Für beliebiges rationales symmetrisches $\mathfrak{M}$ sei dann unter dem Nenner ν von $\mathfrak{M}$ die kleinste natürliche Zahl verstanden, so daß $\nu\mathfrak{M}$ halbganz ist.

$\mathfrak{S}$ sei wieder unsere ganze symmetrische Matrix, $\mathfrak{C}$ irgendeine ganze m-reihige Matrix derart, daß der absolute Betrag c ihrer Determinante > 0 ist, und q sei wieder eine natürliche Zahl. Es wird dann $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ gesetzt und behauptet:

Ist der Nenner von $\frac{q}{4}\mathfrak{T}^{-1}$ *teilerfremd zu* c, *so gilt*

$$G_q(\mathfrak{T}) = cG_q(\mathfrak{S}) . \tag{8}$$

Beweis. Aus (6) folgt

$$G_q(\mathfrak{T}) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{m}{2}} (c^2 s)^{\frac{1}{2}-m} \sum_{\mathfrak{x}(2c^2 s)} e^{-\frac{\pi i}{2} q \mathfrak{x}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}} .$$

Den Nenner von $\frac{q}{4}\mathfrak{T}^{-1}$ bezeichnet man mit f und ersetzt in der rechten Summe $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}^* + f\mathfrak{y}$, wo $\mathfrak{y}$ eine beliebige ganze m-gliedrige Spalte bedeutet. Dann wird

$$e^{-\pi i \frac{q}{2}\mathfrak{x}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}} = e^{-\frac{\pi i}{2} q \mathfrak{x}^{*\prime}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}^*} .$$

Also wird auch

$$\sum_{\mathfrak{x}(2c^2 s)} e^{-\pi i \frac{q}{2}\mathfrak{x}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}} = \left(\frac{2c^2 s}{f}\right)^m \sum_{\mathfrak{x}(f)} e^{-\pi i \frac{q}{2}\mathfrak{x}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}} .$$

Weil aber f zu c teilerfremd sein sollte, kann man nach Formel (2) in der rechten Summe $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{C}'\mathfrak{x}$ ersetzen. Jetzt wendet man noch auf $G_q(\mathfrak{S})$ die Reziprozitätsformel (6) an und beachtet, daß

$$\sum_{\mathfrak{x}(2s)} e^{-\pi i \frac{q}{2}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{x}} = \left(\frac{2s}{f}\right)^m \sum_{\mathfrak{x}(f)} e^{-\pi i \frac{q}{2}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{x}}$$

besteht. Durch Eintragen ergibt sich sofort die Formel (8).

§ 3. Hilfsbetrachtungen über Kongruenzen.

Es sei wieder d eine ganze von Null verschiedene Zahl, P sei das Produkt über die verschiedenen ungeraden Primteiler von d, und es sei $|d| = D$ gesetzt. $\mathfrak{S}$ habe dieselbe Bedeutung wie bisher. Über den natürlichen Modul q soll jetzt vorausgesetzt werden:

$$8DP \mid q .$$

Dann besagt

Hilfssatz 1. *Es sei r eine natürliche Zahl die keine anderen Primfaktoren enthält als q. Gibt es dann ein zu q teilerfremdes x_0 so daß*

$$|\mathfrak{S}| \equiv dx_0^2 \pmod{q} \tag{9}$$

besteht, so ist auch die Kongruenz

$$|\mathfrak{S}| \equiv dx^2 \pmod{qr} \tag{10}$$

mit einem zu q teilerfremden x lösbar.

Den Beweis braucht man nur für den Fall zu führen, daß r Primzahl ist. Aus (9) entnimmt man $|\mathfrak{S}| = dx_0^2 + qc$ mit ganzem c. Man setzt

$$x = x_0 + \frac{q}{2d}\, y$$

mit ganzem y. Nach (10) soll dann gelten:

$$dx_0^2 + qc \equiv dx_0^2 + qx_0 y + \frac{q^2}{4d}\, y^2 \pmod{qr}.$$

Wegen der Teilbarkeitsvoraussetzung über q ist $\frac{q}{4rd}$ ganz; daher wird

$$c \equiv x_0 y \pmod{r}.$$

Diese Kongruenz hat eine Lösung y, weil ja $(x_0, q) = 1$, also auch $(x_0, r) = 1$ ist. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Man sagt, eine Zahl k wird durch $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ mod q *primitiv* dargestellt, wenn $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \equiv k \pmod{q}$ ist, mit ganzem $\mathfrak{x}$ und so, daß $(x_1, x_2, \ldots, x_m, q) = 1$ ist.

Nun sei $m \geqq 2$, und es gelte

$$|\mathfrak{S}| \equiv d \pmod{q}.$$

Weiter sei angenommen, daß es eine natürliche zu q teilerfremde Zahl k gibt, die durch $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ modulo q darstellbar ist. Im Fall $m = 2$ sei außerdem k Primzahl, und das Legendresche Symbol $\left(\frac{-d}{k}\right)$ habe den Wert $+1$. Dann besagt

Hilfssatz 2. *Bei gegebenem natürlichem Exponenten b gibt es eine ganze symmetrische Matrix $\mathfrak{S}_1$ mit den Eigenschaften*

1) $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S} \pmod{q}$, 2) $|\mathfrak{S}_1| \equiv d \pmod{qk^b}$,

3) *k ist durch $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}_1\mathfrak{x}$ mod qk^b primitiv darstellbar.*

Beweis. Mit $\mathfrak{S}_2$ bezeichne man die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $d, 1, \ldots, 1$. Man wähle ξ und η so, daß die Kongruenzen

$$q\xi \equiv 1 \pmod{k^b}, \qquad k^b\eta \equiv 1 \pmod{q}$$

erfüllt sind, und setze

$$\mathfrak{S}_1 = k^b\eta\mathfrak{S} + q\xi\mathfrak{S}_2.$$

Dann hat $\mathfrak{S}_1$ die Eigenschaften 1) und 2). Man hat nur noch festzustellen, daß k durch $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}_2\mathfrak{x}$ mod k^b primitiv darstellbar ist, denn dann ist für $\mathfrak{S}_1$ auch 3) erfüllt.

Zunächst sei $b = 1$. Die Kongruenz

$$dx_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \equiv k \pmod{k}$$

ist für $m = 2$ wegen $\left(\frac{-d}{k}\right) = +1$, k Primzahl, primitiv lösbar. Sie ist aber auch für $m > 2$ primitiv lösbar, weil sogar stets

$$dx_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv k \pmod{k}$$

primitiv lösbar ist.

Jetzt sei $b > 1$ und $dx_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \equiv k \pmod{k^{b-1}}$ lösbar unter der Bedingung $(x_1, x_2, \ldots, x_m, k) = 1$. Dann setzt man $x_\varkappa + k^{b-1}y_\varkappa$ statt $x_\varkappa$ und erhält

$$d(x_1 + k^{b-1}y_1)^2 + (x_2 + k^{b-1}y_2)^2 + \cdots + (x_m + k^{b-1}y_m)^2$$
$$\equiv dx_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 + 2k^{b-1}(dx_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m) \pmod{k^b}.$$

Man hat jetzt nur noch $y_1, y_2, \ldots, y_m$ so zu wählen, daß

$$2(dx_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m) \equiv -\frac{dx_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 - k}{k^{b-1}} \pmod{k}$$

ist. Das ist möglich weil $(2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_m, k) = 1$ ist. Also ist k durch $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}_2\mathfrak{x} \bmod k^b$ primitiv darstellbar für beliebiges natürliches b.

§ 4. Der Geschlechtersatz.

Zunächst soll die in der Einleitung gestellte Frage etwas anders formuliert werden. Gegeben sei das Zahlenpaar μ, $m - \mu$, wobei μ und $m - \mu$ ganze Zahlen $\geqq 0$ sind. Weiter sei die natürliche Zahl D gegeben und

$$(-1)^{m-\mu} D = d$$

gesetzt. Drittens sei eine Klasse von symmetrischen m-reihigen Matrizen nach einem festen Modul q gegeben, wobei q der Teilbarkeitsbedingung

$$8DP \mid q \tag{11}$$

genügen soll. Dabei bedeutet P wie im vorigen Paragraphen das Produkt über alle ungeraden Primteiler von D. Die Bedingung (11) muß erfüllt sein, weil später der Hilfssatz 1 angewandt wird. Die Gesamtheit der Matrizen der gegebenen Klasse modulo q soll zur Abkürzung mit $\mathfrak{S}(q)$ bezeichnet werden; diese Klasse denkt man sich durch einen beliebigen Repräsentanten $\mathfrak{S}$ festgelegt. Unsere Frage lautet jetzt so:

Wann gibt es eine ganze symmetrische Matrix $\mathfrak{S}_0$ mit den Eigenschaften:

1) $\mathfrak{S}_0$ gehört zu $\mathfrak{S}(q)$, 2) $\mathfrak{S}_0$ hat die Signatur $\mu, m - \mu$, 3) $|\mathfrak{S}_0| = d$?

Diese Frage ist für $q = 8D^3$ gleichbedeutend mit der in der Einleitung gestellten Frage: Wann gehört zu gegebenen Invarianten (α), (β), (γ) ein Geschlecht quadratischer Formen?

Man nimmt zunächst an, das gesuchte $\mathfrak{S}_0$ existiert. Dann muß für jedes $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ nach Definition der Äquivalenz mod q (siehe § 1)

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{S}_0 \pmod{q}, \qquad \mathfrak{B}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{S} \pmod{q}$$

sein mit ganzem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Durch Determinantenbildung folgt $|\mathfrak{B}|^2 d \equiv |\mathfrak{S}| \pmod{q}$ und $|\mathfrak{A}|^2 |\mathfrak{S}| \equiv d \pmod{q}$, also auch $|\mathfrak{A}|^2 |\mathfrak{B}|^2 \equiv 1 \left(\bmod \frac{q}{D}\right)$. Da nach (11) die Zahl q durch $8DP$ teilbar ist, müssen $|\mathfrak{A}|$ und $|\mathfrak{B}|$ zu q teilerfremd sein. Deshalb muß für jedes $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ die Kongruenz

$$|\mathfrak{S}| \equiv dx^2 \pmod{q} \tag{12}$$

mit einem zu q teilerfremden x lösbar sein. Damit ist eine erste notwendige Bedingung für die Existenz von $\mathfrak{S}_0$ gefunden. Um eine zweite zu finden, betrachtet man die durch (1) definierte Gaußsche Summe $G_q(\mathfrak{S})$. Wenn $\mathfrak{S}_0$ existiert, ist nach Formel (6), angewandt mit $a = 2$ und $b = q$,

$$G_q(\mathfrak{S}_0) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{m}{2}} D^{\frac{1}{2}-m} \sum_{\mathfrak{x} (2D)} e^{-\frac{\pi i q}{2} \mathfrak{x}' \mathfrak{S}_0^{-1} \mathfrak{x}}$$

mit $\sigma = \mu - (m - \mu)$. Da aber q der Bedingung (11) genügt, ist die rechte Summe gleich der Anzahl ihrer Elemente. Daraus folgt

$$G_q(\mathfrak{S}_0) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} (2q)^{\frac{m}{2}} D^{\frac{1}{2}}.$$

Andrerseits ist $G_q(\mathfrak{S}_0)$ nur von der Restklasse von $\mathfrak{S}_0$ mod q abhängig, und es besteht für alle $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ die Kongruenz $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{B}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{B} \pmod{q}$ mit mod q unimodularen $\mathfrak{B}$. Also

ist nach Formel (2) für jedes $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$

$$G_q(\mathfrak{S}_0) = G_q(\mathfrak{S}) .$$

Angenommen also, das gesuchte $\mathfrak{S}_0$ existiert, dann muß für beliebiges $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$

$$G_q(\mathfrak{S}) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} (2q)^{\frac{m}{2}} D^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

sein.

Es ergab sich also: Wenn das gesuchte $\mathfrak{S}_0$ existiert, dann besteht für beliebiges $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ die Kongruenz (12) mit zu q teilerfremdem x und die Relation (13). Nun ist zu zeigen, daß keine weiteren Relationen zwischen den drei Bestimmungsstücken Signatur, absoluter Betrag der Determinante D und Klasse $\mathfrak{S}(q)$ bestehen. Es ist also zu beweisen, daß der in der Einleitung für $q = 8D^3$ bereits formulierte *Geschlechtersatz* richtig ist:

Gegeben seien das Zahlenpaar $\mu, m - \mu$ und die natürlichen Zahlen D und q, ferner eine Klasse $\mathfrak{S}(q)$. Die Bedingungen (11), (12) *und* (13) *seien erfüllt. Dann gibt es in der Klasse $\mathfrak{S}(q)$ eine ganze symmetrische Matrix $\mathfrak{S}_0$ mit der Signatur $\mu, m - \mu$ und der Determinante d.*

Dem Beweis werden einige Betrachtungen vorausgeschickt; dabei wird immer angenommen, daß $\mu, m - \mu$, D, q und $\mathfrak{S}(q)$ gegeben und die Bedingungen (11), (12) und (13) erfüllt sind.

Man nimmt zunächst an, es sei $\mu = 0$ gegeben. Indem man in (13) zum Konjugiert-komplexen übergeht, ergibt sich, daß alle drei Bedingungen auch für $-\mathfrak{S}(q)$ anstelle $\mathfrak{S}(q)$, $\mu = m$ anstelle $\mu = 0$, $(-1)^m d$ anstelle d erfüllt sind. Man nehme an, der Geschlechtersatz sei für $\mu = m$ bewiesen. Dann existiert ein $-\mathfrak{S}_0$ in $-\mathfrak{S}(q)$ mit der Signatur $m, 0$ und der Determinante $(-1)^m d$. Also ist $\mathfrak{S}_0$ eine Matrix aus $\mathfrak{S}(q)$, $\mathfrak{S}_0$ hat außerdem die Signatur $0, m$ und die Determinante d. Es genügt deshalb den Geschlechtersatz für $\mu > 0$ zu beweisen.

Mit λ bezeichnet man jetzt den größten gemeinsamen Teiler aller Elemente eines $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ mit q. Dann ist λ eine Invariante unserer Klasse modulo q. Für den Moment sei

$$\mathfrak{S} = \lambda\mathfrak{T} , \quad q = \lambda q_1 , \quad D = \lambda^m D_1 , \quad d = \lambda^m d_1 ,$$

weiter sei P_1 das Produkt aller ungeraden Primteiler von D_1. Dann ist P_1 Teiler von P, und aus (11) entnimmt man

$$8 D_1 P_1 \mid q_1 .$$

Daraus, daß Bedingung (13) erfüllt ist, folgt dann unter Anwendung von (3)

$$G_{q_1}(\mathfrak{T}) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} (2q_1)^{\frac{m}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} .$$

Ferner ergibt sich aus (12) und aus Hilfssatz 1, daß die Kongruenz

$$| \mathfrak{T} | \equiv d_1 x^2 \pmod{q_1}$$

mit einem zu q_1 teilerfremden x lösbar ist. Angenommen nun der Geschlechtersatz sei für $\lambda = 1$ bewiesen, dann kann man ihn für $\mathfrak{T}$, q_1 und D_1 anstelle $\mathfrak{S}$, q und D anwenden. Also existiert ein ganzes $\mathfrak{T}_0$ mit $| \mathfrak{T}_0 | = d_1$ und der Signatur $\mu, m - \mu$, so daß außerdem $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{U}'\mathfrak{T}_0\mathfrak{U} \pmod{q_1}$ mit irgendeinem mod q_1 unimodularen $\mathfrak{U}$ besteht. Dann ist $\mathfrak{U}$ auch unimodular mod q. Nun setzt man $\mathfrak{S}_0 = \lambda\mathfrak{T}_0$ und prüft nach, daß $\mathfrak{S}_0$ die gewünschten Eigenschaften hat. Infolgedessen darf für den weiteren Beweis vorausgesetzt werden, daß für die gegebene Klasse mod q die Zahl $\lambda = 1$ ist.

Es war vorausgesetzt worden, daß die Kongruenz (12) lösbar ist. Angenommen für ein $\mathfrak{S}_1$ aus $\mathfrak{S}(q)$ sei speziell $| \mathfrak{S}_1 | \equiv da^2 \pmod{q}$, mit einem gewissen zu q teilerfremden

a, und es sei $ab \equiv 1 \pmod q$. Dann erhält man einen neuen Repräsentanten $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}(q)$, wenn man auf $\mathfrak{S}_1$ die mod q unimodulare Transformation mit derjenigen Diagonalmatrix ausübt, deren erstes Diagonalelement b, deren übrige 1 sind. Dann wird

$$|\mathfrak{S}| \equiv d \pmod q . \tag{14}$$

Durch eine weitere mod q unimodulare Transformation von $\mathfrak{S}$, deren Determinante $\equiv 1 \pmod q$ ist, kann man in bekannter Weise erreichen, daß das erste Element der neuen Matrix entweder zu q teilerfremd ist, oder mit q nur den Teiler 2 gemeinsam hat; es war ja vorausgesetzt, daß $\lambda = 1$ ist. Der letzte Fall tritt dabei nur dann stets ein, wenn $\mathfrak{S}$ gerade ist. Weil q gerade ist, sind dann alle Matrizen der Klasse $\mathfrak{S}(q)$ gerade. Falls das erste Element von $\mathfrak{S}$ zu q teilerfremd ist, kann man nach dem Dirichletschen Satz über die Primzahlen in arithmetischen Reihen $\mathfrak{S}$ in seiner Restklasse mod q noch so abändern, daß das erste Element eine positive Primzahl wird. Für $m > 2$ braucht man diese letzte Abänderung von $\mathfrak{S}$ nicht notwendig vorzunehmen, für $m = 2$ muß sie beim folgenden Beweis gemacht werden, weil Hilfssatz 2 angewandt wird.

Nun seien die Repräsentanten der gegebenen Klasse gerade ($m \geqq 2$). Dabei wird weiter angenommen, daß für einen Repräsentanten $\mathfrak{S}$ das erste Element mit q nur den Teiler 2 gemeinsam hat. Diese Voraussetzung kann man machen, weil nur noch der Fall $\lambda = 1$ zu behandeln ist. Mit $\mathfrak{D}$ bezeichne man die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $2, 1, \ldots, 1$. Die Matrix $\mathfrak{T}$ sei jetzt definiert durch

$$\mathfrak{D}\mathfrak{T}\mathfrak{D} = 2\mathfrak{S} . \tag{15}$$

$\mathfrak{T}$ ist dann eine ganze Matrix deren erstes Element zu q teilerfremd ist. Weiter ist für $\mathfrak{T}$ die Kongruenz

$$|\mathfrak{T}| \equiv 2^{m-2} d x^2 \pmod{2^{m-2} q}, \qquad (x, q) = 1 ,$$

lösbar, weil (12) erfüllt sein soll. Man setzt zur Abkürzung $2^{m-2} d = d^*$ und $2^c q = q^*$, wo c eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß auch die Kongruenz

$$|\mathfrak{T}| \equiv d^* x^2 \pmod{q^*}, \qquad (x, q) = 1 , \tag{16}$$

lösbar ist. Wir wollen, je nachdem ob m ungerade oder gerade ist $c = m$ oder $c = m + 1$ wählen, so daß c immer eine ungerade Zahl $\geqq m$ ist. Nun betrachtet man die Summe $G_q(\mathfrak{S})$. Die Anwendung von Formel (3) mit $a = 2^c$ ergibt

$$2^{m-1} G_q(\mathfrak{S}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+m(c-1)} G_{q^*}(2^c \mathfrak{S}) .$$

Weil Bedingung (13) erfüllt sein soll, folgt dann

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+m(c-1)} G_{q^*}(2^c \mathfrak{S}) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} D^{\frac{1}{2}} q^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{3m}{2}-1} = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} 2^m q^{\frac{m}{2}} D^{*\frac{1}{2}} \tag{17}$$

mit $D^* = 2^{m-2} D$. Der Definitionsgleichung (15) entnimmt man

$$G_{q^*}(2^{c-1} \mathfrak{D}\mathfrak{T}\mathfrak{D}) = G_{q^*}(2^c \mathfrak{S}) .$$

Nun kann man die Formel (8) mit $2^{\frac{c-1}{2}} \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{T}$ anstelle $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$, $2^c \mathfrak{S}$ und q^* anstelle $\mathfrak{T}$ und q anwenden. Es ist nämlich $|\mathfrak{S}| = dx^2 + qy$, wo y eine von $\mathfrak{S}$ abhängige ganze Zahl bedeutet und $(x, q) = 1$ ist. Also ist der Nenner von $\frac{q}{4} \mathfrak{S}^{-1}$ Teiler des Nenners von

$$\frac{q}{4d} : \left(x^2 + \frac{qy}{d}\right) .$$

Wegen Bedingung (11) ist dieser Nenner ungerade, also ist die Anwendung von Formel

(8) mit $\mathfrak{C} = 2^{\frac{c-1}{2}}\mathfrak{D}$ gestattet. Daraus ergibt sich

$$G_{q^*}(2^c\mathfrak{S}) = 2^{1+m\frac{c-1}{2}} G_{q^*}(\mathfrak{T}) .$$

Deshalb folgt aus (17)

$$G_{q^*}(\mathfrak{T}) = e^{\frac{\pi i}{4}\sigma} (2q^*)^{\frac{m}{2}} D^{*\frac{1}{2}} . \tag{18}$$

Daraus, daß (11) erfüllt sein soll und $c \geqq m$ ist, folgt ferner

$$8PD^* \mid q^* . \tag{19}$$

Man nimmt nun an, der Geschlechtersatz sei für die Klasse $\mathfrak{T}(q^*)$ bereits bewiesen. Weil die Bedingungen (16), (18) und (19) erfüllt sind, entnimmt man aus dem Geschlechtersatz, daß es ein ganzes $\mathfrak{T}_0$ mit der Determinante d^* und der Signatur μ, $m - \mu$ gibt, für das die Kongruenz $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{U}'\mathfrak{T}_0\mathfrak{U} \pmod{q^*}$ mit einem mod q^* unimodularen $\mathfrak{U}$ erfüllt ist. Aus (15) ergibt sich dann

$$2\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{D}\mathfrak{U}'\mathfrak{T}_0\mathfrak{U}\mathfrak{D} \pmod{q^*} .$$

Aus der Elementarteilertheorie entnimmt man, daß es zwei unimodulare Matrizen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ derart gibt, daß $\mathfrak{U}\mathfrak{D} = \mathfrak{V}_1\mathfrak{D}^*\mathfrak{V}_2$ ist. Dabei bedeutet $\mathfrak{D}^*$ eine ganze Diagonalmatrix, deren Determinante durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist. Man kann sich $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ so gewählt denken, daß das erste Diagonalelement von $\mathfrak{D}^*$ gerade ist. Dann kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{D} = \mathfrak{V}_1\mathfrak{D}\mathfrak{U}_1 ,$$

wo jetzt $\mathfrak{U}_1$ eine ganze Matrix bedeutet, deren Determinante zu q^* teilerfremd sein muß, weil $(|\mathfrak{U}|, q^*) = 1$ ist. Das trägt man in die letzte Kongruenz ein und erhält

$$\mathfrak{S} \equiv \frac{1}{2}\mathfrak{U}_1'\mathfrak{D}\mathfrak{V}_1'\mathfrak{T}_0\mathfrak{V}_1\mathfrak{D}\mathfrak{U}_1 \left(\mathrm{mod}\,\frac{q^*}{2}\right) .$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{V}_1'\mathfrak{T}_0\mathfrak{V}_1\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_0 ,$$

so ist $\mathfrak{S}_0$ ganz und gehört zur Klasse $\mathfrak{S}(q)$ weil $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{U}_1'\mathfrak{S}_0\mathfrak{U}_1 \left(\mathrm{mod}\,\frac{q^*}{2}\right)$ und q Teiler von $\frac{q^*}{2}$ ist. Wie man sofort sieht, hat außerdem $\mathfrak{S}_0$ die Determinante d und die Signatur μ, $m - \mu$. Ist also der Geschlechtersatz richtig für die Klasse $\mathfrak{T}(q^*)$, deren Matrizen ungerade sind, dann ist er auch richtig für die Klasse $\mathfrak{S}(q)$.

§ 5. Der Induktionsschluß.

Für $m = 1$ ist der Geschlechtersatz trivialerweise richtig. Man hat nur $\mathfrak{S}_0 = d$ zu setzen; dann gehört $\mathfrak{S}_0$ zur Klasse $\mathfrak{S}(q)$ weil Bedingung (12) hier $\mathfrak{S} \sim d \pmod{q}$ bedeutet.

Von jetzt ab sei $m \geqq 2$. Vorausgesetzt wird wieder, daß die Zahlen μ, $m - \mu$, D, q und die Klasse $\mathfrak{S}(q)$ gegeben und die Bedingungen (11), (12) und (13) erfüllt sind. Aus den letzten Abschnitten des vorigen Paragraphen entnimmt man dann:

Für den weiteren Beweis kann man voraussetzen, daß $0 < \mu$ ist. Ferner kann man annehmen, daß für ein geeignetes $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ auch Bedingung (14) erfüllt ist und $\mathfrak{S}$ eine positive zu q teilerfremde Primzahl p zum ersten Element hat. Man kann weiter annehmen, das zweite Element s_{12} sei zu p teilerfremd.

Unter diesen Voraussetzungen wird der Beweis mittels Induktion nach m geführt. Dabei wird von den Formeln (6) und (8), von Hilfssatz 2 und von der Formel für die

quadratische Ergänzung Gebrauch gemacht. Diese letzte Formel besagt, daß es eine $(m-1)$-reihige ganze symmetrische Matrix $\mathfrak{H}$ derart gibt, daß

$$p\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} - (px_1 + s_{12}x_2 + \cdots + s_{1m}x_m)^2 = \mathfrak{y}'\mathfrak{H}\mathfrak{y}$$

ist, wobei die Variablen $x_2, x_3, \ldots, x_m$ zu der Spalte $\mathfrak{y}$ zusammengefaßt sind. Man erkennt sofort, daß mit

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} p & s_{12}, \ldots, s_{1m} \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ die Beziehung

$$p\mathfrak{S} = \mathfrak{F}' \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \mathfrak{F} \tag{20}$$

besteht. Dabei bedeutet $\mathfrak{n}$ die Nullspalte.

Weil $(p, q) = 1$ ist, kann man, unter Anwendung von (2) mit $\mathfrak{B} = p\mathfrak{E}$, schreiben:

$$G_q(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{x}(q)} e^{\frac{2\pi i}{q} p(px_1 + s_{12}x_2 + \cdots + s_{1m}x_m)^2 + \frac{2\pi i}{q} p\mathfrak{y}'\mathfrak{H}\mathfrak{y}} .$$

Außerdem ändert sich wegen (2) der Wert von $G_q(\mathfrak{S})$ nicht, wenn man die Spalte $\mathfrak{x}$ der mod q unimodularen Transformation

$$px_1 + s_{12}x_2 + \cdots + s_{1m}x_m = x , \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}$$

unterwirft. Also ist folgende Gleichung richtig:

$$G_q(\mathfrak{S}) = G_q(p\mathfrak{H})\, G_q(p) . \tag{21}$$

Die Summe $G_q(p\mathfrak{H})$ soll unter Anwendung von (4) mit der Summe $G_{p_1}(\mathfrak{H})$ in Zusammenhang gebracht werden. Zu diesem Zweck beachte man, daß aus der Formel für die quadratische Ergänzung folgt:

$$G_p(q\mathfrak{H}) = \sum_{\mathfrak{y}(p)} e^{-\frac{2\pi i}{p} q(s_{12}x_2 + \cdots + s_{1m}x_m)^2} .$$

Hierin ist die Substitution

$$s_{12}x_2 + \cdots + s_{1m}x_m = x, \qquad x_3 = x_3, \ldots, x_m = x_m$$

gestattet, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; es war ja $(s_{12}, p) = 1$ vorausgesetzt. Also wird

$$G_p(q\mathfrak{H}) = p^{m-2}\, G_p(-q) .$$

Nun wendet man für die Summe $G_q(p\mathfrak{H})$ in (21) die Formel (4) an und formt außerdem $G_q(p)$ mit Hilfe der Reziprozitätsformel (6) um. Dann geht (21) über in

$$G_q(\mathfrak{S}) = e^{\frac{\pi i}{4}} (2q)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{2}-m} G_{pq}(\mathfrak{H}) .$$

Nach Voraussetzung ist für $\mathfrak{S}$ die Bedingung (13) erfüllt, so daß sich aus der letzten Gleichung

$$G_{p_1}(\mathfrak{H}) = e^{\frac{\pi i}{4}(\sigma-1)} (2pq)^{\frac{m-1}{2}} D^{*\frac{1}{2}} \tag{22}$$

ergibt, mit $p^{m-2} D = D^*$.

Man unterbricht jetzt den Gedankengang und nimmt zunächst an es sei $m = 2$. Dann ist zu zeigen, daß aus (21)

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$$

folgt, wo wieder $\left(\frac{-d}{p}\right)$ das Legendresche Symbol bedeutet. Nach Definition ist jetzt $\mathfrak{H} = ps_{22} - s_{12}^2$, weswegen aus Bedingung (14) sofort $H = |\mathfrak{H}| \equiv d \pmod q$ folgt.

Also besagt hier Formel (21)

$$G_q(\mathfrak{S}) = G_q(pd)\, G_q(p)\,. \tag{23}$$

Auf der linken Seite trägt man den Wert aus (13) ein. Dann wendet man auf die erste der beiden rechtsstehenden Summen die Formel (6) an. Man beachte dabei, daß $2\mu - 2 - (-1)^\mu = 1$ ist, weil μ nur die Werte 1 und 2 haben kann. Auf diese Weise ergibt sich

$$e^{\frac{\pi i}{4}} (8pq)^{\frac{1}{2}} D = G_q(p) \sum_{x(2pD)} e^{-\frac{\pi i q}{2dp} x^2}\,.$$

Indem man die letzte der beiden Summen erst unter Benutzung von (3) und dann von (2) umformt, ergibt sich

$$e^{\frac{\pi i}{4}} (2pq)^{\frac{1}{2}} = G_q(p)\, G_p(-dq)\,. \tag{24}$$

Andrerseits ist nach Formel (5)

$$G_p(-dq) = \left(\frac{-d}{p}\right) G_p(q)\,,$$

und nach (4) geht deshalb (24) über in

$$e^{\frac{\pi i}{4}} (2pq)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{-d}{p}\right) G_{pq}(1)\,. \tag{25}$$

Nun rechnet man $G_{p^l}(1)$ mittels Formel (6) aus und findet so, daß aus (25) folgt:

$$\left(\frac{-d}{p}\right) = +1\,.$$

Es sei wieder $m \geqq 2$. Weil für $m = 2$ das Symbol $\left(\frac{-d}{p}\right)$ den Wert $+1$ hat, entnimmt man aus Hilfssatz 2, daß es in $\mathfrak{S}(q)$ ein $\mathfrak{S}$ gibt mit der Eigenschaft

$$|\mathfrak{S}| \equiv d \pmod{p^b q}, \tag{26}$$

bei irgendeinem festen natürlichen b, das später noch näher festgelegt werden soll. Ferner stellt $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ die Zahl p mod $p^b q$ primitiv dar, so daß man annehmen kann, $\mathfrak{S}$ habe wieder p zum ersten Element. Ferner ist nach (26) mindestens eine der Zahlen $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1m}$ zu p teilerfremd; wegen $s_{11} = p$ kann man $(s_{12}, p) = 1$ voraussetzen. Deshalb kann man nachträglich den zu Beginn des Paragraphen gewählten Repräsentanten $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{S}(q)$ so festgelegt denken, daß $\mathfrak{S}$ der Bedingung (26) genügt und wieder p zum ersten Element hat.

Man braucht diese Eigenschaften von $\mathfrak{S}$ um mit Hilfe der Formel (8) die Gleichung (22) umformen zu können. Man setzt zu diesem Zweck $m = u$ oder $m + 1 = u$, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Weiter setzt man $p^u q = q^*$. Nach Formel (3) ist dann

$$G_{q^*}(p^{u-1}\mathfrak{H}) = p^{(u-1)(m-1)}\, G_{pq}(\mathfrak{H})\,.$$

Nun wendet man Formel (8) mit $\mathfrak{H}$, q^* und $p^{\frac{u-1}{2}}\mathfrak{E}$ anstelle $\mathfrak{S}$, q und $\mathfrak{C}$ an. Danach ist

$$G_{q^*}(p^{u-1}\mathfrak{H}) = p^{\frac{(u-1)(m-1)}{2}}\, G_{q^*}(\mathfrak{H})\,.$$

Man hat allerdings noch nachzuweisen, daß der Nenner ν von $\frac{qp}{4}\mathfrak{H}^{-1}$ zu p teilerfremd ist. Nach Formel (20) ist

$$\mathfrak{F}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{F}' = {}_1'\begin{pmatrix} p & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & p\mathfrak{H}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Andrerseits folgt aus Formel (26)

$$|\,\mathfrak{S}\,| = d\left(1 + \frac{qp^b y}{d}\right)$$

mit irgendeinem ganzen von $\mathfrak{S}$ abhängigen y. Also ist v Teiler des Nenners von

$$\frac{q}{4d} : \left(1 + \frac{qp^b y}{d}\right),$$

infolgedessen ist $(v, p) = 1$. Aus (22) folgt deshalb

$$G_{q^*}(\mathfrak{H}) = e^{\frac{\pi i}{4}(\sigma-1)} (2q^*)^{\frac{m-1}{2}} D^{*\frac{1}{2}} . \tag{27}$$

Das in (26) noch willkürliche b legt man jetzt durch die Bedingung

$$b = u + 2 - m$$

fest. Es ergibt sich zunächst aus (20), daß $|\,p\mathfrak{S}\,| = p^2\,|\,\mathfrak{H}\,|$ ist, weswegen aus (26) folgt

$$|\,\mathfrak{H}\,| \equiv d^* \pmod{q^*} \tag{28}$$

mit $d^* = p^{m-2}d$. Da ferner die Teilbarkeitsbedingung (11) erfüllt sein sollte und $u \geqq m$ ist, erkennt man auch

$$8D^*P^* \mid q^* , \tag{29}$$

wobei $P^* = pP$ das Produkt über die ungeraden Primteiler von $D^* = p^{m-2}D$ ist.

Nun nimmt man an, der Geschlechtersatz sei für $m - 1$ anstelle m bewiesen. Dann folgt aus (27), (28) und (29), daß eine ganze symmetrische Matrix $\mathfrak{H}_0$ existiert mit den Eigenschaften

1) $|\,\mathfrak{H}_0\,| = d^*$, 2) Signatur von $\mathfrak{H}_0$ ist $\mu - 1$, $m - \mu$, 3) $\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{U}'\mathfrak{H}_0\mathfrak{U} \pmod{q^*}$,

wobei $(|\,\mathfrak{U}\,|, q^*) = 1$ ist. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{U} \end{pmatrix} \mathfrak{F} = \mathfrak{W} ,$$

so folgt aus (20)

$$p\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{W}' \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{H}_0 \end{pmatrix} \mathfrak{W} \pmod{q^*} . \tag{30}$$

Ähnlich wie am Ende des vierten Paragraphen zeigt man, daß es eine unimodulare Matrix $\mathfrak{V}_1$, eine ganze Diagonalmatrix $\mathfrak{P}$ mit der Determinante p und eine mod q^* unimodulare Matrix $\mathfrak{U}_1$ derart gibt, daß

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{V}_1\mathfrak{P}\mathfrak{U}_1$$

ist. Nun setzt man

$$p\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{P}'\mathfrak{V}_1' \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{H}_0 \end{pmatrix} \mathfrak{V}_1\mathfrak{P} .$$

Trägt man das in (30) ein, so ergibt sich

$$p\mathfrak{S} \equiv p\mathfrak{U}_1'\mathfrak{S}_0\mathfrak{U}_1 \pmod{q^*} . \tag{31}$$

Dabei ist $\mathfrak{S}_0$ ganz, weil $p\mathfrak{S}_0$ ganz und nach (31) alle Elemente von $p\mathfrak{S}_0$ durch p teilbar sind. Nach (31) ist weiter $\mathfrak{S}_0 \sim \mathfrak{S} \pmod{q}$, weil q Teiler von $\frac{q^*}{p}$ ist. Endlich rechnet man sofort nach, daß $\mathfrak{S}_0$ die Determinante d und die Signatur μ, $m - \mu$ hat. Damit ist der Geschlechtersatz bewiesen.

§ 6. Anwendung des Geschlechtersatzes.

Man geht jetzt zurück auf die Gleichungen (**) und (***) der Einleitung. Darin war $\mathfrak{S}$ ganz, symmetrisch, m-reihig und $\mathfrak{T}$ ganz, symmetrisch, n-reihig. Die Determinanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien S und T; die absoluten Beträge von S und T seien s und t ($st \neq 0$).

Die Signatur von $\mathfrak{S}$ sei wieder μ, $m - \mu$, diejenige von $\mathfrak{T}$ sei ν, $n - \nu$; man nennt dann $\sigma = \mu - (m - \mu)$ den Index von $\mathfrak{S}$ und ebenso $\tau = \nu - (n - \nu)$ den Index von $\mathfrak{T}$. Das Ziel ist, den in der Einleitung formulierten Satz III zu beweisen. Von vornherein wird deshalb

$$0 \leqq \mu - \nu \leqq m - n \tag{32}$$

angenommen, weil für Satz III angenommen war, daß $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ mit reellem $\mathfrak{X}$ lösbar ist. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die Ungleichung (32) erfüllt ist.

Zunächst betrachtet man die Kongruenz

$$\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{T} \pmod{q}, \tag{33}$$

wobei jetzt q eine feste natürliche Zahl sein soll, die der Bedingung

$$(2st^m)^4 \mid q \tag{34}$$

genügt. Man bezeichnet als *mod q primitive Lösung* von (33) eine solche Lösung, die man durch hinzufügen von $m - n$ Spalten zu einer mod q unimodularen Matrix ergänzen kann.

Man nimmt nun zunächst an, es sei $n < m$ und es existierte eine mod q primitive Lösung $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}$ von (33), wobei jetzt $\mathfrak{C}$ eine andere Bedeutung hat als bisher. Man kann dann $\mathfrak{C}$ zu einer mod q unimodularen Matrix $\mathfrak{U}$ ergänzen. Dabei ist $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{C}$ nicht eindeutig festgelegt; man greift für die weiteren Überlegungen unter allen möglichen $\mathfrak{U}$ ein festes heraus. Nun setzt man

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U} \equiv \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q} & \mathfrak{R} \end{pmatrix} \pmod{q}, \tag{35}$$

wobei $\mathfrak{Q}$ ganz, $(m - n)$-spaltig und n-zeilig, $\mathfrak{R}$ ganz, symmetrisch und $(m - n)$-reihig ist. Weil $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ sich aus $\mathfrak{U}$ bestimmen, sind sie noch von der Wahl von $\mathfrak{U}$ abhängig. Setzt man noch

$$t\mathfrak{H} = t\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Q} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H} \equiv t(\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Q}) \pmod{q}, \tag{36}$$

wo $\mathfrak{R}$ die Nullmatrix bedeutet, so ist $\mathfrak{G}$ m-reihig und ganz und $t\mathfrak{H}$ $(m - n)$-reihig, ganz und symmetrisch. Man rechnet sofort nach, daß die wichtige Kongruenz

$$t^2\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{G}'\begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{H} \end{pmatrix}\mathfrak{G} \pmod{q} \tag{37}$$

besteht. Um später für $n < m$ Satz III beweisen zu können, zeigt man zunächst, daß aus dem Geschlechtersatz folgt:

Satz IV. *Man nehme an, es existiert eine primitive Lösung $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}$ von* (33) *zu der die Matrix $\mathfrak{H}$ durch* (35) *und* (36) *definiert ist. Dann existiert eine Matrix $\mathfrak{H}_0$ vom Index $\sigma - \tau$ mit den weiteren Eigenschaften*

1) *$t\mathfrak{H}_0$ ist ganz,* 2) $t\mathfrak{H}_0 \sim t\mathfrak{H} \pmod{q}$, 3) $|\mathfrak{H}_0| = ST^{-1}$.

Weil $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ von der speziellen Ergänzung von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{U}$ abhängen, ist auch $\mathfrak{H}$ davon abhängig. Man kann aber zeigen, daß jede beliebige Ergänzung von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{U}^*$ vermöge (35) und (36) zu einer solchen Matrix $\mathfrak{H}^*$ führt, für die $t\mathfrak{H}^* \sim t\mathfrak{H} \pmod{q}$ ist [6]). Deshalb ist das in Satz IV auftretende $\mathfrak{H}_0$ nicht mehr von der speziellen Wahl von $\mathfrak{U}$ abhängig, sondern allein durch $\mathfrak{C}$ bestimmt.

Dem Beweis von Satz IV sei noch folgendes vorausgeschickt:

Dieser Satz ist bereits bekannt; Siegel hat ihn zuerst bewiesen [7]). Er zeigt nämlich zuerst, daß Satz III in einer gewissen Verschärfung richtig ist. Wie in der Einleitung schon

[6]) S., 539. [7]) S., 559—560.

bemerkt wurde, benutzt er dabei den Hasse-Legendreschen Satz aus der rationalen Theorie der quadratischen Formen. Erst unter Anwendung dieses Satzes konnte Siegel die Sätze III und IV beweisen. Bei dem Beweis des Siegelschen Hauptsatzes aus der analytischen Theorie der quadratischen Formen [8]) braucht übrigens Siegel nicht Satz III, sondern nur Satz IV. Zur Vereinheitlichung des Siegelschen Beweises dieses Hauptsatzes genügt es deshalb, Satz IV zu beweisen, ohne von der rationalen Theorie der quadratischen Formen Gebrauch zu machen. Es wäre also in diesem Zusammenhang nicht nötig, zu zeigen, daß Satz III richtig ist; am Schluß soll jedoch noch gezeigt werden, daß für $m > n$ Satz III durch eine einfache Rechnung aus Satz IV folgt. Für $m = n$ wird Satz III ohne weiteres mit Hilfe von Satz I bewiesen. Beim Beweis von Satz IV werden die Betrachtungen aus dem zweiten Paragraphen, der Hilfssatz 1 und der Geschlechtersatz benutzt.

Beweis. Aus der Kongruenz (37) folgt durch Determinantenbildung

$$t^{2m} S x^2 \equiv t^{m+n} T \mid t\mathfrak{H} \mid \pmod{q}, \qquad x = \mid U \mid . \tag{38}$$

Wegen (34) ist hier die Anwendung von Hilfssatz 1 gestattet, woraus folgt, daß

$$\mid t\mathfrak{H} \mid \equiv x^2 t^{m-n} S T^{-1} \pmod{q} \tag{39}$$

mit zu q teilerfremdem x lösbar ist.

Nun setzt man zur Abkürzung $q = rt$ und

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} = \mathfrak{L}$$

und betrachtet die Gaußsche Summe $G_r(\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{G})$. Darin ist wegen (37) die Matrix $\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{G}$ ganz. Die Anwendung der Formel (3) mit $a = t$ ergibt

$$G_r(\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{G}) = t^{-m} G_q(t\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{G}) . \tag{40}$$

Auf diese Summe wendet man noch Formel (8) mit $\mathfrak{G}$ und $t\mathfrak{L}$ anstelle $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ an. Das ist gestattet, weil die Kongruenz (38) besteht und q der Bedingung (34) genügt. Also wird

$$G_q(t\mathfrak{G}'\mathfrak{L}\mathfrak{G}) = t^m G_t(t\mathfrak{L}) . \tag{41}$$

Nun folgt aus (37), (40) und (41)

$$G_r(t^2\mathfrak{S}) = G_q(t\mathfrak{T}) G_q(t\mathfrak{H}) .$$

Auf $G_r(t^2\mathfrak{S})$ und $G_q(t\mathfrak{T})$ wendet man schließlich die Reziprozitätsformel (6) an und erhält

$$G_q(t\mathfrak{H}) = e^{\frac{\pi i}{4}(\sigma-\tau)} (2q)^{\frac{m-n}{2}} (st^{m-n-1})^{\frac{1}{2}} . \tag{42}$$

Den Formeln (34), (39) und (42) entnimmt man, daß mit $m - n$, $\sigma - \tau$, $t\mathfrak{H}$ und $t^{m-n}ST$ anstelle m, σ, $\mathfrak{S}$ und d die Bedingungen (11), (12) und (13) aus dem vierten Paràgraphen erfüllt sind. Nach dem Geschlechtersatz existiert also eine $(m - n)$-reihige ganze symmetrische Matrix $t\mathfrak{H}_0$ mit den Eigenschaften

$$t\mathfrak{H}_0 \sim t\mathfrak{H} \pmod{q}, \quad \text{Index von } \mathfrak{H}_0 \text{ ist } \sigma - \tau, \quad \mid \mathfrak{H}_0 \mid = ST^{-1} .$$

Damit ist Satz IV bewiesen. Man beachte dabei, daß die Voraussetzung (32) notwendig war, damit das $(m - n)$-reihige $\mathfrak{H}_0$ den Index $\sigma - \tau$ haben kann.

Es sei jetzt nicht mehr der Fall $m = n$ ausgeschlossen. Um Satz III zu beweisen, geht man wieder von der Kongruenz (33) aus, worin q der Bedingung (34) genügte. In Satz III war vorausgesetzt, daß eine Lösung $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}$ von (***) für alle natürlichen q, also speziell eine Lösung von (33) existiert. Dieses $\mathfrak{C}$ braucht jetzt nicht notwendig mod q primitiv zu sein. Es sei daran erinnert, daß nach Definition $\mathfrak{C}$ mod q primitiv ist, wenn es durch Hinzufügen von $m - n$ Spalten zu einer mod q unimodularen Matrix er-

[8]) S., 555.

gänzt werden kann. Dieses ist dann und nur dann der Fall, wenn der größte gemeinsame Teiler aller n-reihigen Unterdeterminanten von $\mathfrak{C}$ zu q teilerfremd ist. Im allgemeinen ist das nicht erfüllt; einer Siegelschen Überlegung kann man aber immer folgendes entnehmen [9]):

Es gibt eine ganze umkehrbare Matrix $\mathfrak{R}$ derart, daß $\mathfrak{C}\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{B}$ ganz und primitiv ist. Deshalb ist $|\mathfrak{B}'\mathfrak{S}\mathfrak{B}|$ eine ganze Zahl, also geht der absolute Betrag k von $|\mathfrak{R}|$ zum Quadrat in $|\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C}|$ auf. Angenommen es sei $k = k_1 r$, wo k_1 nur solche Primfaktoren enthält, die in q aufgehen, und $(r, q) = 1$ ist. Indem man in (33) zu den Determinanten übergeht und beachtet, daß (34) erfüllt ist, sieht man daß

$$k_1^2 \mid t\,.$$

Unter Benutzung der Elementarteilertheorie kann man schreiben

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{R}_1\,,$$

wo $|\mathfrak{R}_1| = k_1$ und $(|\mathfrak{U}_1|, q) = 1$ ist. Man setzt noch $k_1^2 q_1 = q$, $\mathfrak{B}\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{R}_1^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{R}_1^{-1}\,.$$

$\mathfrak{T}_1$ ist dann eine ganze Matrix und (33) geht über in

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{T}_1 \pmod{q_1}\,. \tag{43}$$

Infolgedessen erhält man aus jeder beliebigen Lösung $\mathfrak{C}$ von (33) eine primitive Lösung $\mathfrak{A}$ von (43). Dabei ist analog zu (34) die Teilbarkeitsbedingung

$$(2 s t_1^m)^4 \mid q_1$$

erfüllt, wo t_1 den absoluten Betrag der Determinante von $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet. Man beachte noch, daß die Signaturen von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ die gleichen sind. Angenommen nun, es sei bereits bewiesen, daß aus der Existenz eines primitiven $\mathfrak{A}$, das der Kongruenz (43) genügt, die Existenz eines ganzen $\mathfrak{A}_1$ derart folgt, daß für ein zum Geschlecht von $\mathfrak{S}$ gehöriges $\mathfrak{S}^*$

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{S}^*\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{T}_1$$

gilt. Dann folgt sofort durch Transformation mit $\mathfrak{R}_1$, daß Satz III richtig ist.

Hiermit hat sich gezeigt, daß man nur noch folgendes beweisen muß: *Angenommen, es existiert eine mod q primitive Lösung $\mathfrak{C}$ von* (33), *dann gibt es ein ganzes $\mathfrak{C}_1$ derart, daß*

$$\mathfrak{C}_1'\mathfrak{S}^*\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{T} \tag{44}$$

ist.

Zuerst sei $m = n$. Dann wird angenommen, es existiert ein mod q unimodulares $\mathfrak{C}$ derart, daß (33) erfüllt ist. Daraus folgt $|\mathfrak{C}|^2 S \equiv T \pmod{q}$, und aus (34) ergibt sich, daß $s = t$ ist. Wegen (32) haben außerdem $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ dieselbe Signatur. Nach Satz I gehören deshalb $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zum selben Geschlecht, und (44) ist mit $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{E}$ erfüllt.

Jetzt sei $m > n$. Man nimmt an, es liege eine mod q primitive Lösung $\mathfrak{C}$ von (33) vor und $\mathfrak{C}$ sei zu einer mod q unimodularen Matrix $\mathfrak{U}$ ergänzt. Dann gelten die Formeln (35), (36) und (37). Aus Satz IV ergibt sich ferner, daß eine ganze Matrix $t\mathfrak{H}_0$ existiert, mit der Determinante $t^{m-n} S T^{-1}$ und dem Index $\sigma - \tau$, für welche die Kongruenz

$$t\mathfrak{H} \equiv t\mathfrak{U}_2'\mathfrak{H}_0\mathfrak{U}_2 \pmod{q} \tag{45}$$

mit einem mod q unimodularen $\mathfrak{U}_2$ erfüllt ist. Setzt man bei n-reihigem $\mathfrak{E}$ noch

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

so ist auch $\mathfrak{W}$ unimodular mod q, und es folgt durch Eintragen von (45) und (46)

[9]) S., 532.

in (37)

$$t^2 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{G}' \mathfrak{W}' \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{H}_0 \end{pmatrix} \mathfrak{W}\mathfrak{G} \pmod{q}. \tag{47}$$

Der Elementarteilertheorie entnimmt man wieder, daß sich $\mathfrak{W}\mathfrak{G}$ auch in der Form

$$\mathfrak{W}\mathfrak{G} = \mathfrak{V}_1 \mathfrak{D} \mathfrak{W}_1 \tag{48}$$

schreiben läßt, wobei $\mathfrak{V}_1$ unimodular, $\mathfrak{W}_1$ mod q unimodular ist und $\mathfrak{D}$ eine ganze Diagonalmatrix mit $|\mathfrak{D}| = t^m$ bedeutet. Setzt man noch

$$\mathfrak{D} \mathfrak{W}_1' \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{H}_0 \end{pmatrix} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{D} = t^2 \mathfrak{S}^*, \tag{49}$$

so folgt sofort aus (47)

$$\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}^* \left(\mathrm{mod} \frac{q}{t^2} \right). \tag{50}$$

Die Elemente von $\mathfrak{H}_0$ können im Nenner nur Teiler von t haben, also die Elemente von $\mathfrak{S}^*$ im Nenner nur Teiler von t^3. Andrerseits ist aber (50) erfüllt, woraus folgt, daß $\mathfrak{S}^*$ ganz ist. Weil $|\mathfrak{H}_0| = ST^{-1}$ und $|\mathfrak{D}| = t^m$ ist, folgt aus (49), daß $|\mathfrak{S}^*| = S$ ist. Weil $\mathfrak{H}_0$ den Index $\sigma - \tau$ hat, folgt weiter, daß $\mathfrak{S}^*$ den Index σ hat. Hieraus und aus der Äquivalenz (50) folgt unter Anwendung von Satz I (§ 1), daß $\mathfrak{S}^*$ zum Geschlecht von $\mathfrak{S}$ gehört.

Man bezeichnet nun mit $\mathfrak{C}_1$ die ersten n Spalten von $\mathfrak{W}_1$; dann ist $\mathfrak{C}_1$ ganz, und man hat noch zu zeigen, daß $\mathfrak{C}_1$ der Gleichung (44) genügt. Zu diesem Zweck beachtet man, daß nach (48) und (49)

$$\mathfrak{W}_1' \mathfrak{S}^* \mathfrak{W}_1 = t^{-2} \mathfrak{G}' \mathfrak{W}' \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{H}_0 \end{pmatrix} \mathfrak{W}\mathfrak{G}$$

gilt. Andrerseits entnimmt man aus (36) und (46)

$$t^{-1} \mathfrak{W}\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Q} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix}.$$

Trägt man das in die vorhergehende Gleichung ein, dann erkennt man sofort, daß die ersten n Spalten $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{W}_1$ der Gleichung (44) genügen.

Damit ist Satz III bewiesen. Will man noch zeigen, daß die von Siegel bewiesene Verschärfung dieses Satzes gilt, so muß man von zwei weiteren Hilfsbetrachtungen Gebrauch machen [10]). Das bereitet keine besonderen Schwierigkeiten, weswegen hier nicht weiter darauf eingegangen wird, zumal bei der Anwendung der Überlegungen dieses letzten Paragraphen auf den Beweis des Siegelschen Hauptsatzes nur von Satz IV Gebrauch gemacht wird.

[10]) S., 534, Hilfssatz 6; 548, Hilfssatz 19.

Eingegangen 31. März 1939.

Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen.

Von *P. Lorenzen* in Bonn.

G sei eine Menge, $a, b, \ldots$ ihre Elemente und $R(a, b, c)$ eine Relation in G. Wir sagen, R definiert eine Multiplikation ($ab = c$) bzw. eine Division ($c/b = a$), wenn für alle a, b bzw. c, b höchstens ein c bzw. a existiert mit $R(a, b, c)$.

Definition: Wenn R eine Multiplikation definiert, die

A) für alle a, b existiert das Produkt ab,

B) für alle a, b, c gilt $(ab)\,c = a(bc)$, falls diese Produkte existieren,

C) es gibt ein e, zu dem für alle a ein a' existiert mit $a'a = e$ und $ea = a$

erfüllt, so heißt G eine Gruppe bezgl. R.

Satz 1: Wenn R eine Division definiert die

A) für alle a, b existiert der Quotient a/b,

B) für alle a, b, c gilt $a/c/b/c = a/b$, falls diese Quotienten existieren,

Γ) es gibt ein d, zu dem für alle a ein $\bar{a}$ existiert mit $d/\bar{a} = a$

erfüllt, so ist G eine Gruppe bezgl. R.

Beweis: 1) Aus $d/\bar{a} = a$, $d/\bar{b} = b$ folgt

$$b/\bar{a}/\bar{b} = d/\bar{b}/\bar{a}/\bar{b} = d/\bar{a} = a$$

und
$$a/a = d/\bar{a}/d/\bar{a} = d/d = e.$$

2) Für alle a, b existieren a', c mit

$$e/a' = a,\ b/c = a', \qquad \text{woraus}$$
$$a/e = e/a'/a'/a' = e/a' = a$$

und
$$c/b = c/c/b/c = e/a' = a \qquad \text{folgt.}$$

3) Aus
$$a/c = b/c$$

folgt
$$a/c/e/c = b/c/e/c$$
$$a/e = b/e$$
$$a = b.$$

4) Also definiert R eine Multiplikation, für die A nach 2), B wegen

$$(ab)c/bc = (ab)\,c/c/bc/c = ab/b = a = a(bc)/bc$$

und C nach 1) erfüllt ist.

Aus Satz 1 folgt sofort

Satz 2: Wenn G nichtleer und endlich ist, und R eine Division definiert, die

I) für alle a, b, c gilt $a/c/b/c = a/b$, falls diese Quotienten existieren,

II) für alle a, b existiert ein c mit $a/c = b$

erfüllt, so ist G eine Gruppe bezgl. R.

Anmerkung: Ist G nichtleer und ersetzt man in den Voraussetzungen von Satz 1 Γ) durch:

für alle a, b gilt $a/a/b = b$, falls diese Quotienten existieren,

so erhält man ein Axiomensystem für abelsche Gruppen.

Eingegangen 12. November 1939.

Über algebraische Flächen mit Büscheln elliptischer Kurven.

Von *Kurt Rosenfeldt* in Halle-Saale.

Es sollen im folgenden Flächen, die ein lineares Büschel elliptischer Kurven mit mindestens einem einfachen oder doppelten Basispunkt besitzen, in Doppelebenen transformiert werden. Diese Doppelebenen sind rational oder halbrational [1]). Hierbei wird die von Herrn H. W. E. Jung entwickelte Theorie der algebraischen Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen zugrunde gelegt. Auch werden die dort üblichen Bezeichnungen benutzt.

Die algebraische Fläche sei durch die Gleichung

$$f(xyz) = 0 \tag{1}$$

definiert. Wir betrachten in (1) z als algebraische Funktion von x, y. Dann ist $K(xyz)$ der Körper der algebraischen Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y.

Das Büschel $\langle \mathfrak{G} \rangle$ elliptischer Kurven läßt sich durch eine Gleichung $\mathfrak{G}_1 - \xi \mathfrak{G}_2 = 0$ darstellen, wobei $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ die irgend zwei Kurven des Büschels entsprechenden Divisoren des Körpers sind. Da sie zur selben Divisorenklasse gehören, ist

$$\xi = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2}$$

eine Funktion des Körpers $K(xyz)$.

Wir wählen jetzt ξ als unabhängige Veränderliche und $\bar{z}$, $\bar{y}$ so, daß $K(xyz) = K(\xi\bar{y}\bar{z})$ ist. Die Stellen seien so definiert, daß ξ überall einen bestimmten Wert hat. In $K(\xi\bar{y}\bar{z})$ sei $\xi = \frac{\mathfrak{L}_0}{\mathfrak{L}_\infty}$. Bei dieser birationalen Transformation, die $K(xyz)$ in $K(\xi\bar{y}\bar{z})$ überführt, ist das Büschel $\langle \mathfrak{G} \rangle$ übergegangen in $\langle \mathfrak{L} \rangle$. Ist der Punkt P Basispunkt von $\langle \mathfrak{G} \rangle$, so gehören zu den bei P liegenden Stellen des Körpers $K(xyz)$ Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_i$, die in $K(\xi\bar{y}\bar{z})$ Primteiler erster Art sind. $\mathfrak{A}_i$ seien diese Primteiler.

Es sei $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{L}) = r_i$. Dann ist $r_i > 0$ für mindestens ein i. Für $\mathfrak{L} = 0$, wo $\mathfrak{L}$ irgendein Primteiler aus $\langle \mathfrak{L} \rangle$ ist, geht der Körper $K(xyz)$ über in den Körper der algebraischen Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen, die $\mathfrak{A}_i$ gehen über in Divisoren $\mathfrak{g}_i$ dieses Körpers. Die Ordnung von $\mathfrak{g}_i$ ist r_i.

[1]) J. v. Sz. Nagy, Über die arithmetische Theorie der ternären Gleichungen höheren Geschlechts, Math. Ann. **73** (1912), Über arithmetische Eigenschaften algebraischer Kurven, Berichte aus Ungarn **26** (1908).

$\mathfrak{g}_i$ ist rational in $\mathfrak{L}$, daß heißt, die dem Divisor entsprechende Punktgruppe hängt rational von ξ ab. Betrachtet man die nach Voraussetzung vorhandenen einfachen oder doppelten Basispunkte, so ergibt sich, daß mindestens ein $\mathfrak{g}_k$ existieren muß von der Ordnung

$$r_k = 1 \text{ oder } r_k = 2.$$

Ein solcher Divisor sei $\mathfrak{g}$ und seine Ordnung r.

Ist $\mathfrak{m}$, bei festgehaltenem ξ, der Nenner von $\bar{y}$ in $K(\xi\bar{y}\bar{z}) \equiv \mathfrak{L}$, und ist n die Ordnung von $\mathfrak{m}$, so lassen sich im Körper $\mathfrak{L}$ für den Fall $r = 1$ Funktionen

$$f_i = \frac{\mathfrak{g}^{n-2}\mathfrak{q}_i}{\mathfrak{m}}$$

und im Fall $r = 2$ Funktionen

$$f_i = \frac{\mathfrak{g}^{2n-2}\mathfrak{q}_i}{\mathfrak{m}^2}$$

bilden, die rational von ξ abhängen, also dem Körper $K(\xi, \bar{y}, \bar{z})$ angehören. Da das Geschlecht von $\mathfrak{L}$ gleich 1 ist, gibt es nach dem Riemann-Rochschen Satz mindestens zwei linear unabhängige solcher Funktionen f_1, f_2. Dann ist

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_2} = F$$

eine Funktion zweiter Ordnung in $\mathfrak{L}$, deren Koeffizienten rational von ξ abhängen. Betrachten wir jetzt F als Funktion in $K(\xi\bar{y}\bar{z})$,

$$F = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$$

so ist $(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}) = 2$. Setzen wir daher $\eta = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2}$, so ist $K(xyz)$ ein Körper vom Grade 2 über dem Körper der rationalen Funktionen von ξ, η. Dann läßt sich ein ζ in $K(\xi\bar{y}\bar{z})$ so finden, daß $\zeta^2 = f(\xi, \eta)$ die den Körper definierende Gleichung wird und

$$K(xyz) \equiv K(\xi\bar{y}\bar{z}) \equiv K(\xi, \eta, \zeta)$$

ist. Ist die Ordnung r eines solchen Divisors $\mathfrak{g}$, den wir zur Herstellung der Funktionen f_i benutzt haben, nicht 1 oder 2, so würde man, wenn unter n der Grad der von $\xi = 0$ ausgeschnittenen Kurven verstanden wird, eine Funktion zweiter Ordnung rational in dem Körper $\mathfrak{L}$ erhalten, indem man

$$F = \frac{f_1}{f_2}, \text{ mit } f_i = \frac{\mathfrak{g}^{\frac{\lambda n-2}{r}}\mathfrak{q}_i}{\mathfrak{m}^\lambda}$$

bildet. Dabei ist λ so zu wählen, daß

$$\lambda n \equiv 2 \text{ mod. } r$$

ist. Damit r so gewählt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß der größte gemeinsame Teiler $(n, r) = 1$ oder 2 ist.

Die Mehrgeschlechter der so erhaltenen Doppelebene $\zeta^2 = f(\xi, \eta)$ verschwinden. Denn ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von $K(xyz)$, so gilt:

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}\mathfrak{K}) = 2p - 2 + 2\sigma$$
$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = 2p - 2 + 2\sigma - (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}),$$

[2]) K. Sander, Rationale Herstellung einer Normalbasis für die Vielfachen eines Divisors, Dissertation Halle 1927.

wenn man unter 2σ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen eines allgemeinen Divisors $\mathfrak{G}$ versteht. Da $p = 1$ ist, so folgt daraus:

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = 2\sigma - (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}).$$

Da die Divisoren $\mathfrak{G}$ des Büschels $\langle \mathfrak{G} \rangle$ sich nur in den festen Stellen des Büschels schneiden, und da ein allgemeiner Divisor des Büschels nur in den festen Stellen mehrfache Punkte haben kann, da ferner nach Voraussetzung $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) > 0$ ist, so ist

$$2\sigma - (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) < 0,$$

also

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) < 0.$$

Daraus folgt [3])

$$\{\mathfrak{K}^\alpha\} = 0 \text{ für } \alpha > 0.$$

[3]) Gerhard Görner, Kennzeichnung der halbrationalen Körper, Dissertation Halle 1936.

Eingegangen 12. April 1939.

Die Singularitäten der Elementarkurven.

Von *Otto Delvendahl* in Breslau, z. Zt. im Felde.

M. Linsmann[1]) hat eine Klassifikation der Singularitäten angegeben, die auf ebenen oder auf räumlichen Elementarkurven vorkommen können. Er erhält bei den ebenen Elementarkurven vier und bei den räumlichen Elementarkurven acht verschiedene Arten von Singularitäten und gibt außerdem eine vollständige Übersicht der jeweils möglichen Singularitäten an, nach der auch der duale Fall eines jeden Typs gefunden werden kann.

Hier soll die entsprechende Übersicht über die Arten der Singularitäten angegeben werden, die auf einer im projektiven Raum R_n ($n \geqq 2$) der Dimension n gelegenen Elementarkurve vorkommen können. Es ergeben sich in diesem Falle 2^n verschiedene Typen. Die Klassifikation wird mit Hilfe geeignet gewählter R_{n-1}-Büschel bzw. Punktbüschel durchgeführt.

Nach Fertigstellung des Manuskripts wurde ich freundlicherweise durch Herrn Haupt auf zwei Arbeiten von F. Denk[2]) und P. Scherk[3]) aufmerksam gemacht, mit denen die vorliegende Arbeit sich eng berührt. Die Arbeit von Herrn Denk enthält den Grundgedanken einer Kennzeichnung der Singularitäten der Elementarkurven, die im Ergebnis mit der hier beschriebenen übereinstimmt, und die genaue Beziehung zwischen der Kennzeichnung eines Kurvenpunktes und seiner Ordnung, während in vorliegender Arbeit die Ordnung nur nach unten abgeschätzt wird. In der Arbeit von Herrn Scherk wird die Denksche Kennzeichnung als „Charakteristik“ verwendet; die Beziehung zwischen der Charakteristik eines Kurvenpunktes und der Charakteristik seines dualen Typs wird in einer Fußnote der Scherkschen Arbeit ohne Beweis erwähnt (a. a. O. [3]), 190). Außerdem wird durch die Scherksche Arbeit ein Teil der hier gemachten Voraussetzungen entbehrlich, worauf an entsprechender Stelle hingewiesen werden soll. Trotzdem erschien mir die Veröffentlichung der vorliegenden Arbeit gerechtfertigt. Denn die erwähnte Arbeit von F. Denk enthält keinen Beweis, und die erwähnte Arbeit von P. Scherk unterscheidet sich von meiner Beweismethode; ich habe mich nämlich im Unterschiede zu P. Scherk vor allem bemüht, die Grundgedanken der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit von M. Linsmann unter hauptsächlicher Benutzung der in Fußnote [5]) zitierten Arbeit von O. Haupt auf den n-dimensionalen Raum zu verallgemeinern.

1. Untere Indizes bedeuten im folgenden stets Dimensionszahlen; der untere Index -1 bezeichnet den leeren Raum. Der Raum größter Dimension, der zwei Räumen

[1]) M. Linsmann, Sur les singularités des courbes élémentaires en géométrie finie I, II; Acad. Belgique Bull. Cl. Sci. (5) **22** (1936), 688—698, 873—884.

[2]) F. Denk, Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n; Sitzungsberichte der phys.-med. Soz. Erlangen **67/68** (1935/36), 1—3.

[3]) P. Scherk, Über differenzierbare Kurven und Bögen I, II; Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky **66** (1937), 165—191.

R_s und R_t gemeinsam ist, wird durch das Produkt $R_s R_t$ und der Raum kleinster Dimension, der zwei Räume R_s und R_t enthält, durch die Summe $R_s + R_t$ bezeichnet.

Unter der *Relativordnung* einer Punktmenge des R_n in bezug auf einen R_q $(-1 \leqq q \leqq n-1)$ versteht man die maximale, wirklich erreichte Anzahl verschiedener Punkte der Menge, die einem durch R_q gehenden R_{n-1} angehören, und die nicht schon in R_q liegen. Unter der *Relativklasse* einer Menge von Räumen R_{n-1} des R_n in bezug auf einen $R_q (0 \leqq q \leqq n)$ versteht man die maximale, wirklich erreichte Anzahl verschiedener Elemente der Menge, die durch einen Punkt des R_q gehen, und die nicht schon den R_q enthalten. Die Relativordnung in bezug auf den R_{-1} wird auch als *Ordnung* und die Relativklasse in bezug auf den R_n als *Klasse* bezeichnet. Die Relativordnung in bezug auf einen R_{n-1} und ebenso die Relativklasse in bezug auf einen R_0 ist nur des Wertes 0 fähig.

Im R_n seien n eineindeutige, stetige Funktionen $R_p = f_p(x)$ $(a \leqq x \leqq b;$ $p = 0, \ldots, n-1)$ gegeben, unter denen die folgenden Beziehungen gelten sollen:

$$\lim_{x \to x'} \{f_{p-1}(x') + f_0(x)\} = f_p(x') \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\lim_{x \to x'} \{f_{p+1}(x') f_{n-1}(x)\} = f_p(x') \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-2).$$

(Diese Beziehungen enthalten im besonderen die Forderung der Existenz der vorkommenden Grenzwerte.) Außerdem soll es zu jedem von b verschiedenen Parameterwert x^1 eine obere Umgebung und zu jedem von a verschiedenen Parameterwert x^2 eine untere Umgebung auf der Strecke $\langle a, b \rangle$ so geben, daß für x auf der betreffenden einseitigen Umgebung von x^i $(i = 1, 2)$ der Bogen $R_0 = f_0(x)$ die Ordnung n und der Bogen $R_{n-1} = f_{n-1}(x)$ die Klasse n hat. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann heißt das Bild $R_0 = f_0(x)$ der Strecke $\langle a, b \rangle$ eine *Elementarkurve* und $R'_p = f_p(x')$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ *Berührungs-R_p* an die Elementarkurve im Punkte $R'_0 = f_0(x')$. Auf die Möglichkeit, den Begriff der Elementarkurve unter weniger Voraussetzungen zu erklären, soll hier nicht eingegangen werden [4]).

2. Es sei $R_0^1 = f_0(x^1)$ ein von $f_0(b)$ verschiedener Punkt einer Elementarkurve $R_0 = f_0(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ mit den Berührungsräumen $R_p = f_p(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ und $U^+(x^1)$ eine obere Umgebung von x^1, deren Bild $f_0(x)$ die Ordnung n und deren Bild $f_{n-1}(x)$ die Klasse n hat. Dann ist die Relativordnung von $f_0(x)$ für $x < U^+(x^1)$ in bezug auf $f_p(x^1)$ gleich $n-1-p$ und die Relativklasse von $f_{n-1}(x)$ für $x < U^+(x^1)$ in bezug auf $f_p(x^1)$ gleich p. Die erste dieser Behauptungen beweist man durch Anwendung der Beziehung

$$\lim_{x \to x^1} \{f_{h-1}(x^1) + f_0(x)\} = f_h(x^1) \quad \text{für} \quad h = p, p-1, \ldots, 1$$

und die andere durch Anwendung der Beziehung

$$\lim_{x \to x^1} \{f_{h+1}(x^1) f_{n-1}(x)\} = f_h(x^1) \quad \text{für} \quad h = p, p+1, \ldots, n-2;$$

für $p = 0$ und für $p = n-1$ sind beide Behauptungen offenbar richtig.

Ist nun $R_q (q = 0, 1, \ldots, n-1)$ ein Raum der Dimension q, der $f_{q-1}(x^1)$ enthält, dann ist die Relativordnung des Bogens $f_0(x)$ in bezug auf den R_q für $x < U^+(x^1)$ höchstens

---

[4]) Die Gültigkeit der ersten Formel dieses Absatzes folgt für einseitigen Grenzübergang bereits aus der Voraussetzung endlicher Ordnung des Bogens; vgl. G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris (1932), 114, und I. Sauter, Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-)Ordnung im projektiven R_n, Math. Zeitschr. **41** (1936), 507—536 (hier: 520). Entsprechendes gilt für die zweite Formel des obigen Absatzes; P. Scherk hat (a. a. O.[3]), 188) im Falle der Ordnung n des Bogens die zweite Formel aus der ersten hergeleitet. Er hat auch gezeigt, daß ein offener differenzierbarer Bogen der Ordnung n die Klasse n hat (a. a. O. [3]), 181ff.). Daß alle Berührungsräume eines differenzierbaren Elementarbogens stetig sind, wurde von Hjelmslev bewiesen (vgl. P. Scherk, a. a. O. [3]), 177).

$n-q$. Durch Projektion von $f_0(x)$ aus R_q auf einen zu R_q fremden R_{n-1-q} erkennt man dann, daß es eine obere Umgebung von x^1 gibt, deren Bild $f_0(x)$ in bezug auf den R_q die Relativordnung $n-1-q$ hat [5]). Nimmt man noch die entsprechend zu beweisende duale Tatsache hinzu, so folgt: Zu jedem Parameterwert x^1 aus $\langle a, b)$ und zu jedem Raum R_q $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$ mit $f_{q-1}(x^1) < R_q < f_{q+1}(x^1)$ gibt es eine obere Umgebung $U^+(x^1; R_q)$ des Parameterwertes x^1 auf $\langle a, b)$, deren Bild $f_0(x)$ in bezug auf den R_q die Relativordnung $n-1-q$ und deren Bild $f_{n-1}(x)$ in bezug auf den R_q die Relativklasse q hat; $U^+(x^1; R_q)$ ist eine Funktion von R_q, die für $R_q = f_q(x^1)$ der Umgebung $U^+(x^1)$ gleichgesetzt werden kann, deren Bild $f_0(x)$ die Ordnung n und deren Bild $f_{n-1}(x)$ die Klasse n hat.

Es gelte $f_{q-1}(x^1) < R_q < f_{q+1}(x^1)$, aber $R_q \neq f_q(x^1)$; x^2 sei ein von x^1 verschiedener Parameterwert aus $U^+(x^1; R_q)$. Dann ist für $p = 0, 1, \ldots, n-1$ stets

$$f_p(x^1) + f_{n-1-p}(x^2) = R_n \text{ [6])}.$$

Wäre nämlich z. B. $f_p(x^1) + f_{n-1-p}(x^2) = R_{n-1}$, so müßte einmal für ein h $(h = 1, 2, \ldots, n-p)$

$$f_p(x^1) + f_{n-h-p}(x^2) = f_p(x^1) + f_{n-h-1-p}(x^2) = R_{n-h}$$

gelten, da für $h = 1$

$$f_p(x^1) + f_{n-h-p}(x^2) = R_{n-h}$$

und für $h = n+1-p$

$$f_p(x^1) + f_{n-h-p}(x^2) = R_{n-h+1}$$

gilt. Man wähle in diesem Falle auf der Strecke (x^1, x^2) $h-1$ verschiedene Werte y^i $(i = 1, 2, \ldots, h-1)$ aus und beachte, daß wegen $\lim_{x \to x'} \{f_{k-1}(x') + f_0(x)\} = f_k(x')$ der Raum

$$R_{n-1} = f_{p-1}(x^1) + \sum_{i=1}^{h-1} f_0(y^i) + f_{n-h-1-p}(x^2) + f_0(x)$$

noch einen Punkt $f_0(y^h)$ mit y^h in einer vorgegebenen vollen Umgebung von x^2 enthalten muß, falls nur der Parameterwert x auf (x^1, x^2) hinreichend nahe bei x^1 liegt. Danach betrachte man den Raum

$$R'_{n-1} = f_{p-1}(x^1) + \sum_{i=1}^{h} f_0(y^i) + f_{n-h-2-p}(x^2) + f_0(x')$$

mit $x' \neq x$, aber x' in hinreichender Nähe von x auf (x^1, x^2), der wieder noch einen Punkt $f_0(y^{h+1})$ mit y^{h+1} in einer vorgegebenen vollen Umgebung von x^2 enthalten muß. So erhält man schließlich durch Fortsetzung dieses Verfahrens das Ergebnis, daß das Bild $f_0(x)$ der Umgebung $U^+(x^1; R_q)$ in bezug auf $f_{p-1}(x^1)$ die Relativordnung $n+1-p$ hat, im Widerspruch zur Erklärung von $U^+(x^1; R_q)$.

Offenbar hat das Bild $f_0(x)$ der Strecke $\langle x^1, x^2\rangle$ in bezug auf $f_{q-1}(x^1) + f_{n-2-q}(x^2)$ die Relativordnung 1 und das Bild $f_{n-1}(x)$ der Strecke $\langle x^1, x^2\rangle$ in bezug auf $f_{q+1}(x^1) f_{n-q}(x^2)$ die Relativklasse 1. Das ergibt sich durch zweimalige Anwendung des in **2**, Absatz 1 beschriebenen Beweisgedankens.

---

[5]) Vgl. O. Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung; Math. Ann. **108** (1933), 126—142.

[6]) Vgl. die Fremdheitsbedingung bei J. Sauter (a. a. O. [4]), 529) und die Vielfachheitszählung bei P. Scherk (a. a. O. [3]), 174—175).

Wegen der letzten beiden Abschnitte sind die zwei Bilder

$$B_{n-1} = f_{q-1}(x^1) + f_{n-2-q}(x^2) + f_0(x), \qquad B_0 = f_{q+1}(x^1)\, f_{n-q}(x^2)\, f_{n-1}(x)$$

der Strecke $\langle x^1, x^2\rangle$ mit wachsendem x monoton durchlaufene Teilbüschel. Die beiden Büschelträger von B_{n-1} und B_0 sind zueinander fremd, und die einander entsprechenden Randelemente von B_{n-1} und B_0 liegen miteinander vereinigt. Es liegt sogar jedes Element aus B_{n-1} vereinigt mit einem Element aus B_0 und umgekehrt. Das beweist man auf folgende Art unter Benutzung der Beziehung zwischen $U^+(x^1; R_q)$ und R_q:

Es genügt, auf der Geraden $f_{q+1}(x^1)\, f_{n-q}(x^2)$ einen Punkt P anzugeben, der zu jedem Element von B_{n-1} und zu jedem Element von B_0 fremd ist. Diese Eigenschaft kommt dem Punkt $P = R_q f_{n-q}(x^2) = R_q f_{q+1}(x^1)\, f_{n-q}(x^2)$ zu. Man kann nämlich annehmen, daß kein Randelement aus B_{n-1} oder aus B_0 mit P vereinigt liegt. Würde aber ein inneres Element aus B_{n-1} durch P gehen, so müßte es den R_q enthalten. Daraus folgt nach demselben Verfahren, nach dem oben $f_p(x^1) + f_{n-1-p}(x^2) = R_n$ bewiesen worden ist, daß der Bogen $f_0(x)$ für $x < U^+(x^1; R_q)$ in bezug auf den R_q die Relativordnung $n - q$ hat, im Widerspruch zur Erklärung der Umgebung $U^+(x^1; R_q)$. Ebenso zeigt man, daß P kein innerer Punkt von B_0 ist.

3. Aus der unter **2** bewiesenen Tatsache folgt: Diejenige Strecke

$$\langle f_q(x^1)\, f_{n-q}(x^2); f_{q+1}(x^1)\, f_{n-1-q}(x^2)\rangle,$$

die für $x^1 \leqq x \leqq x^2$ von $f_{n-1}(x)$ bestrichen wird, und der Bogen $f_0(x)$ für $x^1 \leqq x \leqq x^2$ sind fremd zu demselben durch $f_q(x^1) + f_{n-2-q}(x^2)$ und $f_{q-1}(x^1) + f_{n-1-q}(x^2)$ begrenzten Gebiet. Wegen der Beziehung $\lim\limits_{x \to x^1} \{f_q(x^1) + f_0(x)\} = f_{q+1}(x^1)$ gilt außerdem: Ist R'_{n-1} ein Raum mit $R'_{n-1} f_{q+1}(x^1) = f_q(x^1)$, so gibt es eine obere Umgebung $U^+(x^1; R'_{n-1})$ des Parameterwertes x^1, deren Bild $f_0(x)$ fremd ist zu demselben durch $f_q(x^1) + f_{n-2-q}(x^2)$ und R'_{n-1} begrenzten Gebiet wie der ganze Raum $f_{q+1}(x^1)$, in dem die Strecke

$$\langle f_q(x^1)\, f_{n-1}(x^2); f_{q+1}(x^1)\, f_{n-1-q}(x^2)\rangle$$

liegt, die für $x^1 \leqq x \leqq x^2$ von $f_{n-1}(x)$ bestrichen wird. Aus diesen beiden Lagebeziehungen folgt schließlich (am besten durch Projektion des Bogens $f_0(x)$ aus $f_{q-1}(x^1)$ auf $f_{n-q}(x^2)$, wobei das Projektionsbild von $f_0(x^1)$ durch $f_q(x^1) f_{n-q}(x^2)$ gegeben wird):

Sind R'_{n-1} und $\bar{R}_{n-1}$ zwei Räume mit $R'_{n-1} f_{q+1}(x^1) = f_q(x^1)$, $\bar{R}_{n-1} f_q(x^1) = f_{q-1}(x^1)$, so gibt es eine obere Umgebung $U^+(x^1)$, deren beide Bilder $f_0(x)$ und $f_{q+1}(x^1)\, f_{n-q}(x^2) f_{n-1}(x)$ fremd sind zu demselben durch R'_{n-1} und $\bar{R}_{n-1}$ begrenzten Gebiet[7]). Die Umgebung $U^+(x^1)$ kann man sogar so wählen, daß die Abbildung $R'_{n-1}\bar{R}_{n-1} + f_0(x)$ für $x < U^+(x^1)$ monoton und stetig wird. Diese letzte Behauptung ist gleichbedeutend mit der, daß das Bild $f_0(x)$ der Umgebung $U^+(x^1)$ in bezug auf den $R'_{n-2} = R'_{n-1}\bar{R}_{n-1}$ die Relativordnung 1 hat. Um das einzusehen, betrachte man die Kette von Räumen

$$R'_{q-1} = f_{q-1}(x^1) < R'_q < R'_{q+1} < \cdots < R'_{n-3} < R'_{n-2};$$

es gibt eine obere Umgebung von x^1, deren Bild $f_0(x)$ in bezug auf $f_{q-1}(x^1)$ die Relativordnung $n - q$ hat, und aus der Existenz einer oberen Umgebung von x^1, deren Bild $f_0(x)$ in bezug auf R'_{p-1} die Relativordnung $n - p$ hat, folgt nach einem Satz von O. Haupt[5]) die Existenz einer oberen Umgebung von x^1, deren Bild $f_0(x)$ in bezug auf R'_p die Relativordnung $n - 1 - p$ hat. Also gibt es eine obere Umgebung von x^1, deren Bild $f_0(x)$ in bezug auf R'_{n-2} die Relativordnung 1 hat.

[7]) Vgl. O. Delvendahl, Über Kurven von beschränkter Ordnung; Neue deutsche Forschungen **173** (1938), 13—15.

Die Verknüpfung der im vorstehenden Absatz bewiesenen Tatsache mit der entsprechend zu beweisenden, zu ihr dualen Tatsache liefert jetzt das Ergebnis:

Zu jedem Wert $x^1 < \langle a, b)$ und zu jedem R_{n-2} und R_1 mit

$$f_{q-1}(x^1) < R_{n-2},\ f_{q+1}(x^1) + R_{n-2} = R_n;\ f_{q+1}(x^1) > R_1,\ f_{q-1}(x^1)\ R_1 = R_{-1}\ (q = 0, 1, \ldots, n-1)$$

gibt es eine obere Umgebung $U^+(x^1)$, die durch $R_{n-2} + f_0(x)$ eineindeutig auf eine einseitige Umgebung von $R_{n-2} + f_q(x^1)$ im Büschel der durch R_{n-2} gehenden Räume R_{n-1} und durch $R_1 f_{n-1}(x)$ eineindeutig auf eine einseitige Umgebung von $R_1 f_q(x^1)$ im Punktbüschel der Geraden R_1 abgebildet wird; die Orientierungen des R_{n-1}-Büschels und des R_0-Büschels, die sich durch die Abbildungen $R_{n-2} + f_0(x)$ bzw. $R_1 f_{n-1}(x)$ aus der Orientierung von $U^+(x^1)$ im Sinne wachsender x ergeben, bleiben bei ihrer Übertragung von dem einen dieser Büschel auf das andere durch die Beziehung der vereinigten Lage in Übereinstimmung mit der jeweils durch die direkte Abbildung von $U^+(x^1)$ bewirkten Orientierung.

4. Ist x' innerer Punkt der Strecke $\langle a, b\rangle$, so ergibt sich durch Umkehrung der Orientierung von $\langle a, b\rangle$, daß es sowohl eine obere Umgebung $U^+(x')$ als auch eine untere Umgebung $U^-(x')$ von der unter **3** beschriebenen Art gibt. Aus diesen beiden einseitigen Umgebungen gewinnt man nun durch Zusammensetzung Aufschluß über den Verlauf der Elementarkurve in einer vollen Umgebung $U(x')$. Hierbei sind offenbar genau die folgenden Fälle möglich:

Zur Verfügung stehen n R_{n-1}-Büschel, deren Büschelträger R^q_{n-2} der Bedingung

$$f_{q-1}(x') < R^q_{n-2},\ f_{q+1}(x') + R^q_{n-2} = R_n\ (q = 0, 1, \ldots, n-1)$$

genügen, und n Punktbüschel, deren Trägergeraden R^q_1 bei entsprechender Numerierung der Bedingung

$$f_{n-q}(x') > R^q_1,\ f_{n-2-q}(x') R^q_1 = R_{-1}\ (q = 0, 1, \ldots, n-1)$$

genügen. Es gibt dann auf (a, b) eine obere Umgebung $U^+(x')$ und eine untere Umgebung $U^-(x')$ des Wertes x', von denen jede eineindeutig und stetig abgebildet wird, durch $R^q_{n-2} + f_0(x)$ auf eine einseitige Umgebung von $R^q_{n-2} + f_q(x')$ im Büschel der durch R^q_{n-2} gehenden Räume R_{n-1}, und durch $R^q_1 f_{n-1}(x)$ auf eine einseitige Umgebung von $R^q_1 f_{n-1-q}(x')$ auf der Geraden R^q_1 (für alle $q = 0, 1, \ldots, n-1$). Der Fall, daß bei einer dieser Abbildungen jede volle Umgebung $U(x')$ des Wertes x', die in der Vereinigung von $U^+(x')$ und $U^-(x')$ enthalten ist, in eine volle Umgebung des Bildes von x' im Bildbüschel übergeht, werde mit X und der andere Fall, daß jede solche Umgebung $U(x')$ in eine einseitige Umgebung des Bildes von x' im Bildbüschel übergeht, werde mit Y bezeichnet [8]). Wird für ein q $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$ die Abbildung der Strecke (a, b) auf ein R_{n-1}-Büschel, das die Bedingung des q-ten R_{n-1}-Büschels erfüllt, durch eines der Zeichen X oder Y an der Stelle x' gekennzeichnet, so gilt dieselbe Kennzeichnung an der Stelle x' auch für jede Abbildung auf irgendein R_{n-1}-Büschel, das die Bedingung des q-ten R_{n-1}-Büschels erfüllt, und auch für jede Abbildung auf irgendein Punktbüschel, das die Bedingung des $(n-1-q)$-ten Punktbüschels erfüllt.

Das Verhalten der Elementarkurve $R_0 = f_0(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ mit den Berührungsräumen $f_p(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ in einem ihrer inneren Punkte $f_0(x')$ läßt sich auf zwei zueinander duale Arten durch Ausfüllung eines Schemas von n Stellen, die von

[8]) Die Kennzeichnung mit Hilfe der R_{n-1}-Büschel steht in enger Beziehung zu der Kennzeichnung von F. Denk; sie geht in die Charakteristik von P. Scherk über (a. a. O.[3]), 169), wenn man statt des Zeichens X bzw. Y die Zahl 1 bzw. 2 setzt.

0 bis $n-1$ gezählt werden, mit einem der Zeichen X oder Y kennzeichnen, je nachdem man sich dabei der R_{n-1}-Büschel oder der Punktbüschel bedient. Es gibt demnach für das Verhalten der Elementarkurve in einem ihrer inneren Punkte 2^n verschiedene Möglichkeiten, und die beiden zueinander dualen Kennzeichnungen desselben Kurvenpunktes gehen durch Umkehrung der Reihenfolge der Stellen des kennzeichnenden Schemas auseinander hervor. Kommt bei einer Kennzeichnung des Kurvenpunktes $f_0(x')$ k-mal das Zeichen Y und $(n-k)$-mal das Zeichen X vor, so hat das Bild $f_0(x)$ jeder vollen Umgebung von x' mindestens die Ordnung $n+k$ und ebenso das Bild $f_{n-1}(x)$ jeder vollen Umgebung von x' mindestens die Klasse $n+k$ [9]). Ein gewöhnlicher Kurvenpunkt hat also in seiner Kennzeichnung n-mal das Zeichen X stehen; er ist außerdem dem Typ nach mit seinem dualen Fall identisch wie alle Kurvenpunkte, deren Kennzeichnungen symmetrisch sind. Demnach ist die Anzahl der zu sich selbst dualen Singularitäten $2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$; im Falle der Ebene sind es die Typen X, X und Y, Y, im Falle des Raumes X, X, X; X, Y, X; Y, X, Y und Y, Y, Y und im Falle des R_4 die Typen X, X, X, X; X, Y, Y, X; Y, X, X, Y und Y, Y, Y, Y.

Daß die Ordnung des Bildes $f_0(x)$ jeder vollen Umgebung von x' mindestens $n+k$ ist, wenn in einem Schema des Punktes $f_0(x')$ genau k-mal das Zeichen Y steht, erkennt man auf folgende Art [9]): Für x^1 in einer hinreichend kleinen oberen Umgebung von x' enthält der Raum $f_{n-2}(x') + f_0(x^1)$ keinen Punkt $f_0(x)$ mit $x \neq x'$, $x \neq x^1$ und x in einer vorgegebenen vollen Umgebung von x' oder genau einen solchen Punkt, je nachdem ob das mit Hilfe der R_{n-1}-Büschel zu x' bestimmte Schema in der letzten Stelle das Zeichen X oder das Zeichen Y stehen hat. Ebenso enthält der Raum $f_{n-3}(x') + f_0(x^1) + f_0(x^2)$ für $x^2 (\neq x^1)$ in einer hinreichend kleinen oberen Umgebung von x' keinen Punkt $f_0(x)$ mit $x \neq x'$, $x \neq x^i$ $(i = 1, 2)$ und x in einer vorgegebenen vollen Umgebung von x' oder einen oder zwei verschiedene solche Punkte, je nachdem ob das mit Hilfe der R_{n-1}-Büschel zu x' bestimmte Schema in seinen letzten beiden Stellen nur das Zeichen X oder genau einmal das Zeichen Y oder nur das Zeichen Y stehen hat, usw.

Schließlich werde noch kurz erwähnt, daß sich sämtliche 2^n Typen der Singularitäten, die auf den Elementarkurven des R_n vorkommen können, auch verwirklichen lassen. Man kann das z. B. durch Projektion einer im R_{2n} gelegenen Elementarkurve $f_0(x)$ der Ordnung $2n$ mit den Berührungsräumen $f_p(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, 2n-1)$ aus einem zu $f_0(x')$ fremden R'_{n-1} auf einen zu R'_{n-1} fremden R_n erreichen [10]). Das mit Hilfe der R_{n-1}-Büschel gebildete Schema des Projektionspunktes von $f_0(x')$ besteht dann nur aus den Zeichen X, wenn $R'_{n-1} + f_n(x') = R_{2n}$ ist, es hat an der q-ten Stelle $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$ das Zeichen Y und sonst nur das Zeichen X, wenn

$$R'_{n-1} + f_q(x') = R_{n+q}, \qquad R'_{n-1} + f_{q+1}(x') = R_{n+q}$$

ist, und es hat an der q-ten und an der r-ten Stelle

$$(q = 0, 1, \ldots, n-2; r = q+1, q+2, \ldots, n-1)$$

das Zeichen Y und sonst nur das Zeichen X, wenn $R'_{n-1} + f_q(x') = R'_{n-1} + f_{q+1}(x') = R_{n+q}$ und $R'_{n-1} + f_r(x') = R'_{n-1} + f_{r+1}(x') = R_{n-1-r}$ ist, usw. Aber das ist, auch abgesehen von der zu ihr dualen Möglichkeit, nicht die einzige Art der Verwirklichung der auf den Elementarkurven des R_n möglichen Singularitäten.

[9]) Vgl. die erwähnte Arbeit von F. Denk (a. a. O. [2]), 2), wo die genaue Beziehung zwischen der Kennzeichnung des Kurvenpunktes und seiner Ordnung angegeben wird, sowie auch P. Scherk a. a. O. [3]), 169—171.

[10]) Vgl. P. Scherk a. a. O. [3]), 169.

Eingegangen 10. Mai 1939.

Über die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate.

Von *R. Sprague* in Berlin-Charlottenburg.

Es sei $s \geqq 1$ das Seitenverhältnis eines Rechtecks, das restlos in endlich viele paarweise inkongruente Quadrate zerlegt werden kann (auch im Fall $s = 1$ soll die Mehrzahl gelten); die Menge aller s werde mit σ bezeichnet.

Über diese Menge sind bisher unter anderem folgende Tatsachen bekannt geworden:

σ *enthält keine irrationale Zahl* [1]),
σ *hat den Häufungswert* 1 [2]),
σ *ist oberhalb* 1 *überall dicht* [3]),
σ *enthält die Zahl* 1 [4]).

Das Resultat der vorliegenden Arbeit lautet:

Jedes Rechteck von rationalem Seitenverhältnis läßt sich in endlich viele paarweise inkongruente Quadrate zerlegen. Mit anderen Worten: σ *enthält alle rationalen Zahlen* $\geqq 1$.

Zusammen mit dem zitierten Satz von Herrn Dehn ergibt dies die *Identität von* σ *mit der Menge der rationalen Zahlen* $\geqq 1$.

Zum Beweise wird die Existenz einer unendlichen Folge gleichgroßer Quadrate dargetan, deren Glieder einzeln in endlich viele paarweise inkongruente Teilquadrate zerlegt sind und zu je zweien in keinem Teilquadrat übereinstimmen. Daraus folgt dann unmittelbar der behauptete Satz.

§ 1.

Ein Rechteck R_0 habe die Seitenlängen 1 und $s_0 > 1$. An eine der kürzeren Seiten von R_0 wird das zu R_0 ähnliche Rechteck angefügt, dessen größere Seite die Länge 1 hat. So entsteht eine Rechteck R_1 mit den Seitenlängen 1 und s_1; es enthält 2 Abbilder von R_0, nämlich R_0 selbst und eine verkleinerte Wiedergabe. Dies Verfahren werde schrittweise fortgesetzt:

An eine der kürzeren Seiten von R_m wird das zu R_m ähnliche Rechteck (mit allen Teilungsstrecken) angefügt, dessen größere Seite die Länge 1 hat. So erhält man ein Rechteck R_{m+1} mit den Seitenlängen 1 und s_{m+1}; es besteht aus 2^{m+1} Abbildern von R_0. (Fig. 1 zeigt ein R_2 mit $s_0 = 2$.)

[1]) M. Dehn, Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Ann. **57** (1903), S. 314—332.

[2]) M. Abe, On the problem to cover simply and without gap the inside of a square with a finite number of squares which are all different from one another, Proceed. Phys.-Math. Soc. Japan (3) **14** (1932), S. 385—387.

[3]) A. Stöhr, Über Zerlegungen von Rechtecken in inkongruente Quadrate (Diss. Berlin 1938), Schriften d. Math. Inst. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **4** (1939), S. 119—140.

[4]) R. Sprague, Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate, Math. Zeitschrift **45** (1939), S. 607—608.

Für die Folge s_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) gilt nach dieser Konstruktion offenbar das Bildungsgesetz

$$s_{m+1} = s_m + \frac{1}{s_m} \qquad (m \geqq 0);$$

dem entspricht für die Folge $u_0 = s_0, u_1, u_2, \ldots$ der Differenzen der s_ν (vgl. Fig. 1) das Bildungsgesetz

$$(1) \qquad s_{m+1} - s_m = u_{m+1} = \frac{1}{u_0 + u_1 + \cdots + u_m} = \frac{1}{s_m} \qquad (m \geqq 0).$$

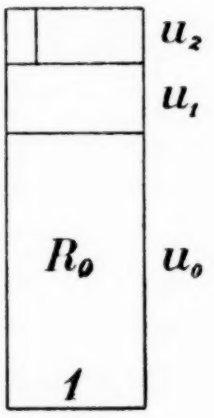

Fig. 1.

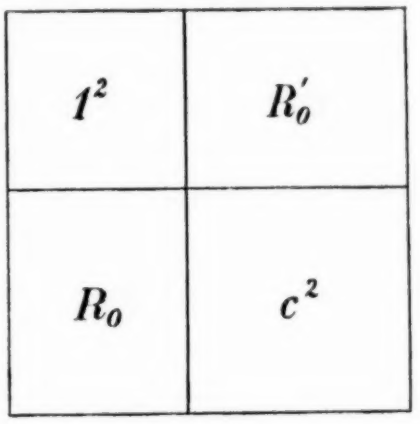

Fig. 2.

Spätere Schlüsse beruhen auf zwei Hilfssätzen über die Folge u_ν.

Hilfssatz 1. *Die Reihe* $u_0 + u_1 + \cdots$ ($u_0 > 0$) *mit dem Bildungsgesetz* (1) *ist divergent.*

Beweis. Die Annahme ihrer Konvergenz ergibt $u_m \to 0$, also nach (1) den Widerspruch $s_m \to \infty$.

Hilfssatz 2. *In der Reihe von Hilfssatz* 1 *sei* u_0 *und daher* u_ν ($\nu \geqq 0$) *rational, also mit ganzen positiven Zahlen* r_ν, t_ν

$$u_\nu = \frac{r_\nu}{t_\nu}, \quad (r_\nu, t_\nu) = 1 .$$

Dann ist für $m \geqq 2$

a) $(t_m, r_i) = 1$, $(t_m, t_i) = 1 \qquad (1 \leqq i \leqq m-1)$;

b) $t_m > t_1^{2^{m-1}}$.

Beweis. a) Es ist

$$u_0 = \frac{r_0}{t_0}, \quad u_1 = \frac{t_0}{r_0} = \frac{r_1}{t_1}, \quad u_2 = \frac{r_0 \cdot t_0}{r_0^2 + t_0^2} = \frac{t_0 \cdot t_1}{r_1^2 + t_1^2} = \frac{r_2}{t_2} .$$

Für $m = 2$ gilt also, wegen $(r_0, t_0) = 1$,

$$(2) \qquad r_m = \prod_{\mu=0}^{m-1} t_\mu, \; t_m = r_{m-1}^2 + t_{m-1}^2 .$$

Dies sei für irgendein $m \geqq 2$ richtig. Dann ist

$$\frac{r_{m+1}}{t_{m+1}} = u_{m+1} = \frac{1}{s_m} = \frac{1}{u_m + s_{m-1}} = \frac{1}{u_m + \dfrac{1}{u_m}} = \frac{u_m}{u_m^2 + 1} = \frac{r_m \cdot t_m}{r_m^2 + t_m^2} = \frac{\prod_{\mu=0}^{m} t_\mu}{r_m^2 + t_m^2} .$$

Aus $(r_\nu, t_\nu) = 1$ folgt

$$r_{m+1} = \prod_{\mu=0}^{m} t_\mu, \quad t_{m+1} = r_m^2 + t_m^2 .$$

Daher gilt (2) für alle $m \geqq 2$.

Aus der ersten Gleichung von (2) und $(r_\nu, t_\nu) = 1$ ergibt sich die Richtigkeit der Behauptungen.

b) Nach (2) ist

$$t_m = r_{m-1}^2 + t_{m-1}^2 > t_{m-1}^2 \qquad (m \geqq 2),$$

also

$$t_m > t_{m-1}^2 > t_{m-2}^4 > \cdots > t_1^{2^{m-1}}.$$

§ 2.

Mit Q_0 werde ein Quadrat bezeichnet, das, wie Fig. 2 für $c = \frac{16}{13}$ zeigt, in zwei inkongruente Quadrate mit den Seitenlängen $c = s_0$, $c_0 = 1 < s_0$ und zwei kongruente Rechtecke R_0, R_0' von § 1 zerlegt ist. Die Rechtecke mögen unabhängig voneinander in eine endliche Anzahl von Quadraten zerlegt sein; wegen $c_0 = 1$ sind nach einem Satze von Herrn Dehn[1]) alle Seitenlängen rationale Zahlen.

Dann soll Q_1 dasjenige Quadrat bedeuten, das entsprechend, außer zwei inkongruenten Quadraten, je ein ähnliches Abbild der Rechtecke R_1 und R_1' von § 1 enthält und ebenso groß ist wie Q_0. Beim Übergang von R_0, R_0' zu R_1, R_1' und auch sonst sind die Zerlegungen in Teilquadrate zu übertragen.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird eine Folge Q_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ von gleichgroßen Quadraten gebildet, deren jedes aus zwei inkongruenten Teilquadraten und zwei in Quadrate zerlegten Rechtecken besteht.

Mit wachsendem ν nimmt das größere Teilquadrat beständig zu, das kleinere beständig ab.

Die Seitenlängen der Quadrate in R_0 und R_0' seien $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Für die weiteren Überlegungen ist es belanglos, in welcher Weise sich diese Quadrate auf R_0 und R_0' verteilen. Es ist bequem, sie gleichsam alle dem Rechteck R_0 zuzuschreiben; darum ist von R_ν' weiterhin nicht die Rede.

Da das Seitenverhältnis s_m von R_m mit m unbeschränkt wächst (Hilfssatz 1), aber die Länge der größeren Seite des in Q_m befindlichen Abbildes von R_m unterhalb der Seitenlänge $1 + s_0$ aller Q_ν liegt, nimmt die Länge der kleineren Seite dieses Abbildes bei wachsendem m nach Null hin ab.

Man kann daher ein m_1 so groß wählen, daß die zuletzt genannte Länge für Q_{m_1} kleiner ausfällt als die kleinste der Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Dann ist kein Teilquadrat von $Q_{m_1} = \bar{Q}_1$ irgendeinem Teilquadrat von $Q_0 = \bar{Q}_0$ kongruent.

Weiter kann man $m_2 > m_1$ so groß wählen, daß in Q_{m_2} die kleinere Seite des Abbildes von R_{m_2} kürzer wird als die kleinste Teilquadratseite von $\bar{Q}_1$. Dann ist kein Teilquadrat von $Q_{m_2} = \bar{Q}_2$ irgendeinem Teilquadrat von $\bar{Q}_0$ oder $\bar{Q}_1$ kongruent.

So fortfahrend, gewinnt man eine unendliche Folge $\bar{Q}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ von gleichgroßen Quadraten, deren Glieder $\bar{Q}_i$ und $\bar{Q}_k$ für $i \neq k$ in keinem Teilquadrat übereinstimmen.

§ 3.

Von jetzt ab sei Q_0 in lauter *verschiedene* Quadrate zerlegt, also

$$c > c_0 > c_1 > \cdots > c_n \quad (c_0 = 1).$$

Es ist die Frage, unter welchen Bedingungen dann auch jedes Q_ν aus paarweise inkongruenten Quadraten besteht.

Sei l (> 0) die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß Q_l (mindestens) zwei kongruente Teilquadrate aufweist; offenbar kommen dann in jedem Q_ν mit $\nu > l$ gleichfalls kongruente Teilquadrate vor.

Die beiden größten Quadrate in Q_l sind dort nur je einmal vertreten; die Seitenverhältnisse der übrigen stimmen mit den Seitenverhältnissen der Teilquadrate von R_l überein.

R_1 enthält zwei Abbilder von R_0; die Längen ihrer kleineren Seiten sind 1 und u_1.

R_2 enthält 2^2 Abbilder von R_0; die Längen ihrer kleineren Seiten betragen 1, u_1, u_2, $u_1 \cdot u_2$ (vgl. Fig. 1).

R_l enthält 2^l Abbilder von R_0; die Längen ihrer kleineren Seiten bilden die Glieder der Summe, die sich durch formale Ausrechnung des Produkts

$$\prod_{\mu=1}^{l} (1 + u_\mu)$$

ergibt.

R_l enthält zwei Abbilder von R_{l-1}, auf die je eines von zwei kongruenten Teilquadraten des Rechtecks R_l entfallen muß; andernfalls gäbe es schon in R_{l-1} kongruente Quadrate, gegen die Definition von l.

Nach diesen Bemerkungen kommt der Seitenlänge eines in R_{l-1} liegenden Quadrats ein Wert

$$c_x \cdot u_{x_1} \cdot u_{x_2} \cdots u_{x_p}, \quad 1 \leqq x \leqq n, \quad 0 \leqq p, \quad 1 \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqq l - 1$$

zu, wobei für $p = 0$ nur c_x dastehen soll.

Die Seitenlänge eines in R_l und nicht in R_{l-1} liegenden Quadrats hat entsprechend einen Wert

$$c_y \cdot u_{y_1} \cdot u_{y_2} \cdots u_{y_q} \cdot u_l, \quad 1 \leqq y \leqq n, \quad 0 \leqq q, \quad 1 \leqq y_1 < y_2 < \cdots < y_q < l.$$

Aus der Gleichheit beider Werte folgt, mit leichtverständlicher Abkürzung,

$$\frac{c_x}{c_y} = \frac{\Pi(u_y) \cdot r_l}{\Pi(u_x) \cdot t_l} = \frac{\Pi(r_y) \cdot \Pi(t_x) \cdot r_l}{\Pi(t_y) \cdot \Pi(r_x) \cdot t_l}.$$

Für $l \geqq 2$ kann sich t_l in dem letzten Bruch, nach Hilfssatz 2, a), nicht einmal zum Teil fortheben.

Vergrößert man Q_0 in solchem Maßstabe, daß die neuen Seitenlängen c', c'_0, c'_1, . . ., c'_n der Teilquadrate sämtlich ganze Zahlen mit $(c', c'_0, c'_1, \ldots, c'_n) = 1$ werden, so muß wegen

$$\frac{c'_x}{c'_y} = \frac{c_x}{c_y}$$

nach Hilfssatz 2, b) jedenfalls

$$c'_1 \geqq c'_y \geqq t_l > t_1^{2^{l-1}}$$

gelten; dabei ist $t_1 = r_0$ der Zähler des Seitenverhältnisses $\frac{r_0}{t_0} = s_0 > 1$ mit $(r_0, t_0) = 1$ von R_0, also $t_1 > 1$.

Für $l = 1$ ergibt sich

$$\frac{c'_x}{c'_y} = \frac{r_1}{t_1} = \frac{1}{s_0};$$

es stehen dann zwei Quadratseiten von R_0 im Verhältnis der Seiten von R_0.

§ 4.

Nach § 3 läßt sich für jedes vorgelegte, aus lauter verschiedenen Quadraten zusammengesetzte Q_0 in einer endlichen Anzahl von Schritten entscheiden, ob jedes Q_ν diese Eigenschaft von Q_0 teilt.

Diese Entscheidung soll nun für ein bekanntes [4]) Q_0, es heiße Q_0^*, durchgeführt werden (Fig. 2 stellt Q_0^* ohne die Zerteilung der Rechtecke dar).

Dazu genügen die folgenden Angaben über Q_0^*:

1. dort ist $s_0 = \frac{16}{13}$, also $t_1 = 16$;
2. von den Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(n = 53)$ steht kein Paar im Verhältnis 16 : 13;
3. es ist $c_1' = 1040$;
4. keine der Zahlen $c_1', c_2', \ldots, c_n'$ ist durch 425 teilbar.

Der Fall $l = 1$ scheidet wegen 1. und 2. aus.

Für $l \geqq 2$ muß, nach § 3,

$$t_1^{2^{l-1}} < c_1',$$

also

$$16^{2^{l-1}} < 1040$$

sein. Daraus folgt $l < 3$; es kommt daher nur noch $l = 2$ in Betracht.

Mit $r_0 = 16$, $t_0 = 13$ ergibt sich $t_2 = 16^2 + 13^2 = 425$. Nach § 3 müßten dann zwei Zahlen c_x', c_y' einen Bruch $\frac{c_x'}{c_y'}$ bilden, aus dessen Nenner sich 425 nicht fortheben läßt. Das ist wegen 4. unmöglich.

Daher enthält jedes Q_ν^* $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, also auch jedes $\overline{Q}_\nu^*$ (§ 2) lauter inkongruente Quadrate, und die Teilquadrate aller $\overline{Q}_\nu^*$ sind in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent. (Dies gilt übrigens schon für die Teilquadrate aller Q_ν^*; doch ist die Begründung nicht einfacher als die nur Hilfssatz 1 erfordernde Konstruktion der Teilfolge $\overline{Q}_\nu^*$.)

Jedes Rechteck mit rationalem Seitenverhältnis ist offensichtlich in lauter gleiche Quadrate zerlegbar. Wenn man diese sämtlich, oder bis auf eines, durch ebenso große Abbilder von verschiedenen Gliedern der Folge $\overline{Q}_\nu^*$ ersetzt, gewinnt man eine Zerlegung des Rechtecks in endlich viele paarweise inkongruente Quadrate.

Damit ist der in der Einleitung angekündigte Satz bewiesen.

Eingegangen 16. Juni 1939.